Е.С. КОЧЕТКОВ
Е.С. КОЧЕТКОВА

Алгебра и элементарные функции

ЧАСТЬ 2

Е. С. КОЧЕТКОВ
Е. С. КОЧЕТКОВА

Алгебра и элементарные функции

Учебное пособие
для учащихся 10 класса
средней школы

Под редакцией доктора
физико-математических наук О. Н. Головина

Утверждено Министерством
просвещения РСФСР

Издание 9-е

МОСКВА
«ПРОСВЕЩЕНИЕ»
1974

512 (075)
К 75

Эта книга, предназначенная для учащихся 10 класса, представляет собой вторую часть учебника «Алгебра и элементарные функции».

В обеих книгах сохранена единая нумерация глав, параграфов, рисунков и упражнений.

К $\frac{0661-175}{М\ 103(03)-74}$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ VII

§ 149. Расстояние между двумя точками плоскости. Системы координат 3
§ 150. Косинус суммы и разности двух углов 5
§ 151. Синус суммы и разности двух углов 7
§ 152. Тангенс суммы и разности двух углов 9
§ 153. Тригонометрические функции двойного угла 12
§ 154. Выражение $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ через тангенс половинного угла 14
§ 155. Соотношения между тригонометрическими функциями половинного угла и косинусом целого угла 16
§ 156. Выражение тангенса половинного угла через синус и косинус целого угла. 18
§ 157. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму 19
§ 158. Преобразование суммы (разности) синусов двух углов в произведение 20
§ 159. Преобразование суммы (разности) косинусов двух углов в произведение 22
§ 160. Преобразование суммы (разности) тангенсов двух углов 24
§ 161. Графики тригонометрических функций кратных углов 26
§ 162. Графики функций $y = A\sin\omega x$, $y = A\cos\omega x$, $y = A\operatorname{tg}\omega x$, $y = A\operatorname{ctg}\omega x$ 28
§ 163. Графики тригонометрических функций $y = A\sin[\omega(x+a)]$, $y = A\cos[\omega(x+a)]$ и т. д. 34
§ 164. Графики функций $y = A\sin(\omega x+\alpha)$, $y = A\cos(\omega x+\alpha)$ и т. д. 39
§ 165. Гармоническое колебание 41
§ 166. Гармоническое колебание в электротехнике 43
§ 167. Преобразование выражения $a\sin x + b\cos x$ путем введения вспомогательного угла 45

§ 168. Сложение гармонических колебаний одинаковой частоты . . . 47
§ 169. Доказательство тригонометрических тождеств 48
§ 170. Равенства, содержащие выражения arcsin α, arccos α и т. д. . . . 51
§ 171. Тригонометрические уравнения 52
§ 172. Графический способ решения тригонометрических уравнений . 59
Задачи на повторение 61
§ 173. Из истории тригонометрии 63

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ VIII

§ 174. Степень положительного числа с положительным рациональным показателем 65
§ 175. Степень положительного числа с положительным иррациональным показателем 66
§ 176. Степень положительного числа с отрицательным иррациональным показателем 69
§ 177. Основные свойства степеней положительных чисел с действительными показателями . . . . . —
§ 178. Показательная функция и ее график 70
§ 179. Основные свойства показательной функции 73
§ 180 Логарифм числа по данному основанию 78
§ 181. Логарифмическая функция и ее график 81
§ 182. Основные свойства логарифмической функции 84
§ 183. Логарифм произведения и частного 88
§ 184. Логарифм степени и корня 90
§ 185. Переход от одного основания логарифмов к другому 92
§ 186. Логарифмирование и потенцирование 93
§ 187. Целая и дробная части числа 96
§ 188. Десятичные логарифмы и их свойства 97
§ 189. Таблицы десятичных логарифмов 101
§ 190. Таблицы антилогарифмов 103
§ 191. Таблицы десятичных логарифмов тригонометрических функций 104
§ 192. Действия над логарифмами 105
§ 193. Примеры вычисления с помощью таблиц логарифмов 107
§ 194. Натуральные логарифмы 108
§ 195. Обоснование действий на логарифмической линейке 109
§ 196. Основные способы решения показательных уравнений 111
§ 197. Основные способы решения логарифмических уравнений . . . 114

§ 198. Примеры графического решения показательных и логарифмических уравнений 119
§ 199. Показательные и логарифмические неравенства 121
§ 200. Из истории открытия логарифмов 122
Задачи на повторение 123

ФУНКЦИИ И ПРЕДЕЛЫ IX

§ 201. Постоянные и переменные величины. Понятие функции 126
§ 202. Способы задания функций 128
§ 203. Область определения и область изменения функции 132
§ 204. Возрастание и убывание функций 137
§ 205. Экстремальные значения функции 139
§ 206. Четные и нечетные функции 143
§ 207. Периодические функции 146
§ 208. Обратные функции 148
§ 209. Взаимное расположение графиков прямой и обратной функций . . 151
§ 210. Краткий обзор свойств и графиков ранее изученных функций . . . 152
1. Квадратная функция $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ 153
2. Степенная функция $y = x^r$ 155
3. Тригонометрические функции 156
4. Показательная функция $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$ 157
5. Логарифмическая функция $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$ . . . . . —
§ 211. Предел функции 158
§ 212. Основные теоремы о пределах функций 162
§ 213. Некоторые тригонометрические неравенства и их использование при нахождении пределов 165
§ 214. Предел отношения $\frac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$ 167
§ 215. Примеры вычисления пределов 169
§ 216. Из истории развития понятий функции и предела 171
Задачи на повторение . . . . . —

ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ X

§ 217. Равномерное и переменное движение по прямой. Скорость и средняя скорость движения 173
§ 218. Закон движения. Мгновенная скорость движения 174

§ 219. Производная функции 176
§ 220. Дифференцируемые функции 179
§ 221. Касательная к кривой 180
§ 222. Геометрическое истолкование производной 182
§ 223. Вынесение постоянного множителя за знак производной 183
§ 224. Производная суммы функций . . . . . —
§ 225. Дифференцирование произведения двух функций 185
§ 226. Производная дроби 186
§ 227. Производная степенной функции 187
§ 228. Производная многочлена 189
§ 229. Дифференцирование тригонометрических функций . . . . . —
§ 230. Дифференцирование функции $f(ax + b)$ 192
§ 231. Понятие о второй производной. Производные высших порядков . . 193
§ 232. Выражение коэффициентов многочлена через значения его производных 195
§ 233 Формула бинома Ньютона 196
§ 234. Об одном свойстве биномиальных коэффициентов 198
§ 235. Применение формулы бинома Ньютона к приближенным вычислениям 199
§ 236. Применение производной к нахождению участков возрастания и участков убывания функций 201
§ 237. Применение производной к нахождению локальных экстремумов функции 202
§ 238. Наименьшее и наибольшее значения функции в заданном интервале 205
§ 239. Использование производных для исследования дифференцируемых функций и построения их графиков 206
§ 240. Применение производной к графическому решению уравнений . . 210
§ 241. Исторические замечания 211
Задачи на повторение . . . . . —

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА XI

§ 242. Числовые поля 213
§ 243. Постановка задачи о расширении поля действительных чисел. Комплексные числа 215
§ 244. Сложение комплексных чисел Противоположные числа 217

§ 245. Вычитание комплексных чисел 218
§ 246. Умножение комплексных чисел 219
§ 247. Деление комплексных чисел 220
§ 248. Поле комплексных чисел 222
§ 249. Геометрическое изображение комплексных чисел 224
§ 250. Действительные и чисто мнимые числа 227
§ 251. Сопряженные числа. Практический способ деления комплексных чисел 229
§ 252. Степени мнимой единицы 231
§ 253. Извлечение корней квадратных из отрицательных чисел. Решение квадратных уравнений с отрицательными дискриминантами —
§ 254. Двучленные уравнения 3-й степени с действительными коэффициентами 233
§ 255. Двучленные уравнения 4-й степени с действительными коэффициентами 235
§ 256. Тригонометрическая форма комплексных чисел 236
§ 257. Умножение и деление комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме 240
§ 258. Извлечение корней из комплексного числа 241
§ 259. Алгебраическое уравнение n-й степени 243
§ 260. Исторические замечания 245
Задачи на повторение 246

МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ XII

§ 261. Общие и частные утверждения. Дедукция и индукция 248
§ 262. Метод математической индукции 250
§ 263. Другой вариант метода математической индукции 253
§ 264. Замечание к методу математической индукции 255
Задачи на повторение всего курса алгебры и элементарных функций 256
Ответы к упражнениям 268

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ

VII

Расстояние между двумя точками плоскости. Системы координат § 149

Каждая точка A плоскости характеризуется своими координатами (x, y). Они совпадают с координатами вектора $\overrightarrow{OA}$, выходящего из точки O — начала координат (рис. 216).

Пусть A и B — произвольные точки плоскости с координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) соответственно (рис. 217). Тогда вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет, очевидно, координаты $(x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$. Известно, что квадрат длины вектора равен сумме квадратов его координат (см. ч. I, § 92). Поэтому расстояние d между точками A и B, или, что то же самое, длина вектора $\overrightarrow{AB}$, определяется из условия

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Отсюда

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Полученная формула позволяет находить расстояние между любыми двумя точками плоскости, если только известны координаты этих точек.

Каждый раз, говоря о координатах той или иной точки плоскости, мы имеем в виду вполне определенную систему координат xOy. А вообще-то систему координат на плоскости можно выбирать по-разному. Так, вместо системы координат xOy можно рассмотреть систему координат $x'Oy'$ (рис. 218), которая получается в результате поворота старых осей координат вокруг

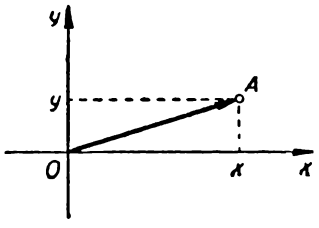

Рис. 216.

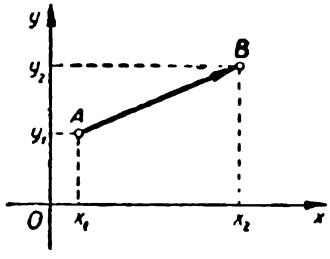

Рис. 217.

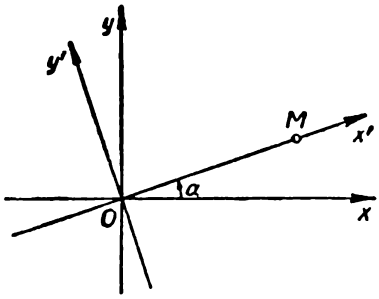

Рис. 218.

начальной точки O против часовой стрелки на угол α. Если некоторая точка плоскости в системе координат xOy имела координаты (x, y), то в новой системе координат $x'Oy'$ она будет иметь уже другие координаты (x', y').

В качестве примера рассмотрим точку M, расположенную на оси Ox' и отстоящую от точки O на расстоянии, равном 1 (рис. 218). Очевидно, что в системе координат xOy эта точка имеет координаты $(\cos\alpha, \sin\alpha)$, а в системе координат $x'Oy'$ координаты (1, 0).

Координаты любых двух точек плоскости A и B зависят от того, как в этой плоскости задана система координат. А вот расстояние между этими точками не зависит от способа задания системы координат. Это важное обстоятельство будет существенно использовано нами в следующем параграфе.

Упражнения

1024. Найти расстояния между точками плоскости с координатами:

1) (3, 5) и (3, 4);
2) (2, 1) и (—5, 1);
3) (0, 5) и (5, 0);
4) (0, 7) и (3, 3);
5) (—3, 4) и (9, —17);
6) (8, 21) и (1, —3).

1025. Найти периметр треугольника, стороны которого заданы уравнениями:

$$x + y - 1 = 0, \quad 2x - y - 2 = 0 \quad \text{и} \quad y = 1.$$

1026. В системе координат xOy точки M и N имеют координаты (1, 0) и (0, 1) соответственно. Найти координаты этих точек в новой системе координат, которая получается в результате поворота старых осей вокруг начальной точки на угол в 30° против часовой стрелки.

1027. В системе координат xOy точки M и N имеют координаты (2, 0) и $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ соответственно. Найти координаты этих точек в новой системе координат, которая получается в результате поворота старых осей вокруг начальной точки на угол в 30° по часовой стрелке.

В этом параграфе будут доказаны следующие две формулы:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \quad (1)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta. \quad (2)$$

Косинус суммы (разности) двух углов равен произведению косинусов этих углов минус (плюс) произведение синусов этих углов.

Нам удобнее будет начать с доказательства формулы (2). Для простоты изложения предположим сначала, что углы α и β удовлетворяют следующим условиям:

1) каждый из этих углов неотрицателен и меньше 2π: $0 \leqslant \alpha < 2\pi$, $0 \leqslant \beta < 2\pi$;

2) $\alpha \geqslant \beta$.

Пусть положительная часть оси Ox является общей начальной стороной углов α и β (рис. 219). Конечные стороны этих углов обозначим соответственно через OA и OB. Очевидно, что угол $\alpha - \beta$ можно рассматривать как такой угол, на который нужно повернуть луч OB вокруг точки O против часовой стрелки, чтобы его направление совпало с направлением луча OA.

На лучах OA и OB отметим точки M и N, отстоящие от начала координат O на расстоянии 1, так что $OM = ON = 1$. В системе координат xOy точка M имеет координаты $(\cos\alpha, \sin\alpha)$, а точка N — координаты $(\cos\beta, \sin\beta)$. Поэтому квадрат расстояния между ними равен:

$$d_1^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta = 2(1 - \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta).$$

При вычислениях мы воспользовались тождеством

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1.$$

Теперь рассмотрим другую систему координат BOC, которая получается путем поворота осей Ox и Oy вокруг точки O против часовой стрелки на угол β. В этой системе координат точка M имеет координаты $(\cos(\alpha - \beta), \sin(\alpha - \beta))$, а точка N — координаты $(1, 0)$. Поэтому квадрат расстояния между ними равен:

$$d_2^2 = [\cos(\alpha - \beta) - 1]^2 + [\sin(\alpha - \beta) - 0]^2 = \cos^2(\alpha - \beta) - 2\cos(\alpha - \beta) + 1 + \sin^2(\alpha - \beta) = 2[1 - \cos(\alpha - \beta)].$$

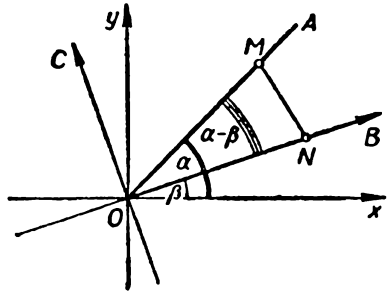

Рис. 219.

Но расстояние между точками M и N не зависит от того, относительно какой системы координат мы рассматриваем эти точки. Поэтому

$$d_1^2 = d_2^2,$$

или

$$2\,(1 - \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) = 2\,[1 - \cos(\alpha - \beta)].$$

Отсюда и вытекает формула (2).

Теперь следует вспомнить о тех двух ограничениях, которые мы наложили для простоты изложения на углы α и β.

Требование, чтобы каждый из углов α и β был неотрицательным, на самом деле не существенно. Ведь к любому из этих углов можно прибавить угол, кратный 2π, что никак не отразится на справедливости формулы (2). Точно так же от каждого из данных углов можно вычесть угол, кратный 2π. Поэтому можно считать, что $0 \leqslant \alpha < 2\pi$, $0 \leqslant \beta < 2\pi$.

Не существенным оказывается и условие $\alpha \geqslant \beta$. Действительно, если $\alpha < \beta$, то $\beta > \alpha$; поэтому, учитывая четность функции $\cos x$, получаем:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\beta - \alpha) = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha,$$

что по существу совпадает с формулой (2).

Таким образом, формула

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

верна для любых углов α и β. В частности, заменяя в ней β на $-\beta$ и учитывая, что функция $\cos x$ является четной, а функция $\sin x$ нечетной, получаем:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos[\alpha - (-\beta)] = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta) = \\ = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

что доказывает формулу (1).

Итак, формулы (1) и (2) доказаны.

Примеры.

1) $\cos 75^\circ = \cos(30^\circ + 45^\circ) = \cos 30^\circ \cdot \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \cdot \sin 45^\circ =$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

2) $\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Упражнения

1028. Вычислить, не пользуясь тригонометрическими таблицами:

а) $\cos 17^\circ \cdot \cos 43^\circ - \sin 17^\circ \cdot \sin 43^\circ$;

б) $\sin 3^\circ \cdot \sin 42^\circ - \cos 3^\circ \cdot \cos 42^\circ$;
в) $\cos 29^\circ \cdot \cos 74^\circ + \sin 29^\circ \cdot \sin 74^\circ$;
г) $\sin 97^\circ \cdot \sin 37^\circ + \cos 37^\circ \cdot \cos 97^\circ$;
д) $\cos \frac{3}{8}\pi \cdot \cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{3}{8}\pi \cdot \sin \frac{\pi}{8}$;
е) $\sin \frac{3}{5}\pi \cdot \sin \frac{7}{5}\pi - \cos \frac{7}{5}\pi \cdot \cos \frac{3}{5}\pi$.

Упростить выражения (№ 1029 — 1034):

1029. $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$.

1030. $\cos(36^\circ + \alpha) \cdot \cos(24^\circ - \alpha) + \sin(36^\circ + \alpha) \cdot \sin(\alpha - 24^\circ)$.

1031. $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

1032. $\cos 2\alpha + \operatorname{tg}\alpha \cdot \sin 2\alpha$.

1033. $\frac{\cos(\alpha + \beta) + \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\cos(\alpha - \beta) - \sin\alpha \cdot \sin\beta}$.

1034. $\frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos\alpha \cdot \cos\beta}{\cos(\alpha + \beta) + \sin\alpha \cdot \sin\beta}$.

1035. Вычислить: а) $\cos(\alpha - \beta)$, если

$$\cos\alpha = -\frac{2}{5},\ \sin\beta = -\frac{5}{13};$$

$$90^\circ < \alpha < 180^\circ,\quad 180^\circ < \beta < 270^\circ;$$

б) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$, если $\cos\alpha = 0{,}6$;

$$\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi.$$

1036. Найти $\cos(\alpha + \beta)$ и $\cos(\alpha - \beta)$, если известно, что $\sin\alpha = \frac{7}{25}$, $\cos\beta = -\frac{5}{13}$ и оба угла (α и β) оканчиваются в одной и той же четверти.

Вычислить:

1037. $\cos\left[\arcsin\frac{1}{3} + \arccos\frac{2}{3}\right]$.

1038. $\cos\left[\arcsin\frac{1}{3} - \arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right]$.

1039. $\cos\left[\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}(-2)\right]$.

Синус суммы и разности двух углов § 151

Полученные в предыдущем параграфе формулы для $\cos(\alpha \pm \beta)$ мы используем теперь при выводе соответствующих формул для $\sin(\alpha \pm \beta)$. Для этого придется воспользоваться формулами приведения (см. ч. I, § 111).

Представим $\sin(\alpha+\beta)$ в виде:

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right].$$

После этого заметим, что

$$\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)=\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta.$$

Следовательно,

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right]=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+$$
$$+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\sin\beta\cdot\cos\alpha.$$

Итак,

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\sin\beta\cdot\cos\alpha. \qquad (1)$$

Синус суммы двух углов равен произведению синуса первого угла на косинус второго плюс произведение синуса второго угла на косинус первого.

Например,

$$\sin 105^\circ=\sin(60^\circ+45^\circ)=\sin 60^\circ\cdot\cos 45^\circ+$$
$$+\sin 45^\circ\cdot\cos 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Формула (1) представляет собой тождество, то есть равенство, справедливое при любых значениях α и β. В частности, оно должно быть верным, если β заменить на $-\beta$. В результате такой замены мы получим:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos(-\beta)+\sin(-\beta)\cdot\cos\alpha=$$
$$=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\sin\beta\cdot\cos\alpha.$$

Итак,

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\sin\beta\cdot\cos\alpha. \qquad (2)$$

Синус разности двух углов равен произведению синуса первого угла на косинус второго минус произведение синуса второго угла на косинус первого.

Например,

$$\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin 45^\circ\cdot\cos 30^\circ-\sin 30^\circ\cdot\cos 45^\circ=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Упражнения

1040. Вычислить:

а) $\sin 19^\circ\cdot\cos 26^\circ+\sin 26^\circ\cdot\cos 19^\circ$;
б) $\sin 46^\circ\cdot\cos 44^\circ+\cos 46^\circ\cdot\sin 44^\circ$;

в) $\sin 61° \cdot \cos 31° - \cos 61° \cdot \sin 31°$;
г) $\sin 53° \cdot \cos 7° - \cos 53° \cdot \sin(-7°)$;
д) $\sin(-15°) \cdot \cos 75° + \cos 15° \cdot \sin 75°$.

Упростить выражения (№ 1041 — 1047):

1041. $\cos(25° + \alpha) \cdot \sin(15° - \alpha) + \sin(25° + \alpha) \cdot \cos(15° - \alpha)$.

1042. $\sin(96° - \alpha) \cdot \cos(36° + \alpha) - \cos(96° - \alpha) \cdot \sin(36° + \alpha)$.

1043. $\sin(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) - \sin(\alpha - \beta) \cdot \cos(\alpha + \beta)$.

1044. $\operatorname{ctg}\alpha \sin 2\alpha - \cos 2\alpha$.

1045. $\dfrac{\sin(\alpha + \beta) - \cos\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta) + \cos\alpha \cdot \sin\beta}$.

1046. $\dfrac{\sin(\alpha - \beta) + \cos\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta) - \sin\alpha \cdot \cos\beta}$.

1047. $\dfrac{\sin(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}$.

1048. Найти $\sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{3}\right)$, если $\sin\alpha = -0{,}8$.

1049. Найти $\sin(\alpha + \beta)$ и $\sin(\alpha - \beta)$, если $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$, $\cos\beta = -\dfrac{\sqrt{13}}{4}$, причем $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$; $\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$.

1050. Найти $\sin(\alpha + \beta)$ и $\sin(\alpha - \beta)$, если известно, что $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$, $\sin\beta = -\dfrac{5}{13}$, причем углы α и β оканчиваются в разных четвертях.

Вычислить:

1051. $\sin\left(\arcsin\dfrac{1}{3} + \arccos\dfrac{2}{3}\right)$.

1052. $\sin\left[\arcsin\dfrac{1}{2} + \arccos\left(-\dfrac{2}{3}\right)\right]$.

1053. $\sin(\operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} 2)$.

1054. $\sin\left[\arcsin\left(-\dfrac{1}{7}\right) + \arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right]$.

Тангенс суммы и разности двух углов § 152

Формулы для выражения синуса и косинуса суммы (разности) двух углов через синусы и косинусы этих углов позволяют получить соответствующие формулы для тангенса и котангенса.

Действительно,

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta}.$$

Предположим, что $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ отличны от нуля (это равносильно тому, что $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$ определены). Тогда, разделив

числитель и знаменатель последней дроби на $\cos\alpha \cdot \cos\beta$, получим:

$$\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\sin\beta\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\sin\beta\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}.$$

Итак, если тангенсы углов α, β и $\alpha+\beta$ определены, то

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}. \qquad (1)$$

Тангенс суммы двух углов равен сумме тангенсов этих углов, деленной на единицу минус произведение тангенсов этих углов.

Пример:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}.$$

Заменяя в формуле (1) β на $(-\beta)$ и учитывая, что функция $y=\operatorname{tg}x$ является нечетной, получаем:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(-\beta)}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}(-\beta)}=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta};$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}. \qquad (2)$$

Тангенс разности двух углов равен разности тангенсов этих углов, деленной на единицу плюс произведение тангенсов этих углов.

Пример 1.

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}.$$

Пример 2. Пусть прямая $y=k_1x$ образует с осью абсцисс угол α, а прямая $y=k_2x$ — угол β (рис. 220). Тогда угол φ между этими прямыми будет равен $\varphi=\beta-\alpha$.

Предположим, что рассматриваемые прямые не перпендикулярны друг другу. Тогда тангенс угла φ существует и равен

$$\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}(\beta-\alpha)=\frac{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\alpha}.$$

Но $\operatorname{tg}\alpha=k_1$; $\operatorname{tg}\beta=k_2$. Следовательно,

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}.$$

Так, угол между прямыми $y = \frac{x}{2}\left(k_1 = \frac{1}{2}\right)$ и $y = 3x$ $(k_2 = 3)$ определяется из условия

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{3 - \frac{1}{2}}{1 + 3 \cdot \frac{1}{2}} = 1.$$

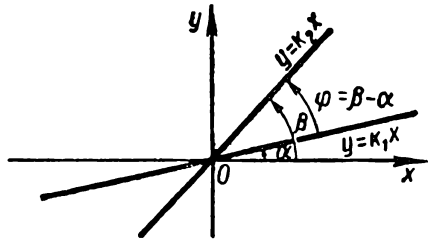

Рис. 220.

Поэтому $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Формулы для котангенса суммы и разности двух углов можно получить аналогично. Однако на практике эти формулы используются очень редко и поэтому приводить их мы не будем.

Упражнения

1055. Найти tg 105°, представив 105° в виде суммы 60° + 45°.

1056. Вычислить:

а) $\frac{\operatorname{tg} 13^\circ + \operatorname{tg} 47^\circ}{1 - \operatorname{tg} 13^\circ \cdot \operatorname{tg} 47^\circ}$;

б) $\frac{1 - \operatorname{tg} 27^\circ \cdot \operatorname{tg} 33^\circ}{\operatorname{tg} 27^\circ + \operatorname{tg} 33^\circ}$;

в) $\frac{\operatorname{tg} 1^\circ - \operatorname{tg} 46^\circ}{1 + \operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 46^\circ}$;

г) $\frac{1 + \operatorname{tg} 4^\circ \cdot \operatorname{tg} 49^\circ}{\operatorname{tg} 49^\circ - \operatorname{tg} 4^\circ}$.

1057. Найти $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ и $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$, если $\sin\alpha = 0{,}6$; $\cos\beta = -\frac{12}{13}$ $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi;\ \pi < \beta < \frac{3}{2}\pi\right)$.

1058. Найти $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ и $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$, если $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$; $\cos\beta = \frac{5}{13}$, причем оба угла (α и β) оканчиваются в одной и той же четверти.

Вычислить (№ 1059—1061):

1059. $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3)$.

1060. $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{3} + \arccos\frac{2}{3}\right)$.

1061. $\operatorname{tg}\left[\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \arccos\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\right]$.

Найти угол между данными прямыми (№ 1062, 1063):

1062. $y = x$ и $y = \frac{2}{3}x + 6$.

1063. $3x - 2y = 6$ и $2x + 3y - 7 = 0$.

1064. Доказать, что прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $k_1k_2 = -1$.

Положив в формуле

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\sin\beta\cdot\cos\alpha$$

$\beta=\alpha$, мы получим:

$$\sin 2\alpha=\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\sin\alpha\cdot\cos\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Итак,

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha. \tag{1}$$

Синус двойного угла равен удвоенному произведению синуса данного угла на его косинус.

Аналогично, положив в формуле

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$\beta=\alpha$, получим: $\cos 2\alpha=\cos\alpha\cdot\cos\alpha-\sin\alpha\cdot\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$. Итак,

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha. \tag{2}$$

Косинус двойного угла равен квадрату косинуса данного угла минус квадрат синуса того же угла.

Точно так же, положив в формуле

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

$\beta=\alpha$, получим:

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}. \tag{3}$$

Тангенс двойного угла равен удвоенному тангенсу данного угла, деленному на единицу минус квадрат тангенса того же угла.

Примеры. 1) Пусть $\sin\alpha=0{,}6$, причем угол α оканчивается во 2-й четверти. Тогда $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-0{,}36}=-0{,}8$.

Поэтому

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=2\cdot 0{,}6\cdot(-0{,}8)=-0{,}96;$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=0{,}64-0{,}36=0{,}28.$$

2) Пусть $\operatorname{tg}\alpha=3$. Тогда

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{6}{1-9}=-\frac{6}{8}=-\frac{3}{4}.$$

Замечание. Не следует думать, что двойной угол обязательно содержит четное число градусов или радианов: 20°; 60°; 4; 6 и т. д. Под двойным углом можно понимать любой угол. Например,

$$45^\circ=2\cdot\left(\frac{45^\circ}{2}\right);\quad 75^\circ=2\cdot\left(\frac{75^\circ}{2}\right);\quad 3=2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)$$

и т. д., вообще, $\alpha = 2 \cdot \frac{\alpha}{2}$. Поэтому иногда доказанные выше формулы полезно записывать в виде:

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2};$$

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Эти формулы выражают тригонометрические функции угла через тригонометрические функции половинного угла.

Упражнения

1065. Известно, что $\sin\alpha = 0{,}8$, причем угол α оканчивается во 2-й четверти. Найти синус, косинус, тангенс и котангенс угла 2α.

1066. Найти $\operatorname{tg} 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$, если известно, что угол α оканчивается не в 1-й четверти и $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$.

1067. Найти $\cos\alpha$, если $\sin\frac{\alpha}{2} = 0{,}1$ и угол α оканчивается в 4-й четверти.

1068. В какой четверти оканчивается угол α, если

а) $\sin\alpha > 0$, $\sin 2\alpha > 0$;
в) $\sin\alpha < 0$, $\sin 2\alpha > 0$;
б) $\sin\alpha > 0$, $\sin 2\alpha < 0$;
г) $\sin\alpha < 0$, $\sin 2\alpha < 0$?

1069. Вычислить:

а) $\sin 22°30' \cdot \cos 22°30'$;

б) $\cos^2 22°30' - \sin^2 22°30'$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg} 22°30'}{1 - \operatorname{tg}^2 22°30'}$;

г) $\dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{6}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}$.

1070. Доказать тождества:

а) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$;
б) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos 2\alpha$;
в) $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{ctg} 2\alpha$.

1071. Доказать, что для любого острого угла α

$$\sin 2\alpha < 2\sin\alpha.$$

1072. В каких пределах может изменяться выражение

$$\sin\alpha \cdot \cos\alpha?$$

Упростить выражения (№ 1073—1078):

1073. $\sin^2(\beta - 45°) - \cos^2(\beta - 45°)$.

1074. $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

1075. $\frac{1}{1-\operatorname{tg}\alpha}-\frac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha}$.

1076. $\left(\sin\frac{\alpha}{4}+\cos\frac{\alpha}{4}\right)\left(\sin\frac{\alpha}{4}-\cos\frac{\alpha}{4}\right)$.

1077. $\frac{\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)}{1-\operatorname{tg}^2(45^\circ+\alpha)}$.

1078. $\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha$.

Доказать равенства (№ 1079, 1080):

1079. $\sin 10^\circ\cdot\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ=\frac{1}{8}$.

1080. $\sin\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$.

1081. Выразить $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$:

а) через $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$;

б) через $\sin\frac{\alpha}{2}$;

в) через $\cos\frac{\alpha}{2}$.

Упростить выражения (№ 1082—1087):

1082. $\frac{\sin^2\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha}{\sin 2\alpha}$.

1083. $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)\sin 2\alpha$.

1084. $2\cos^2\alpha-\cos 2\alpha$.

1085. $\sec\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cdot\sec\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

1086. $\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$.

1087. $\frac{1-\sin 2\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$.

Вычислить (№ 1088 — 1091):

1088. $\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg}3)$.

1089. $\operatorname{tg}\left[2\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right]$.

1090. $\cos\left(2\arcsin\frac{1}{2}\right)$.

1091. $\sin[2\operatorname{arctg}(-2)]$.

1092. Найти формулу общего члена арифметической прогрессии, для которой $a_1=\cos 2\varphi$; $a_2=\cos^2\varphi$.

1093. Доказать, что бесконечная геометрическая прогрессия, у которой $a_1=4\sin\varphi$, $a_2=\sin 2\varphi$, является бесконечно убывающей, и найти ее сумму.

Выражение $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ через тангенс половинного угла § 154

При решении некоторых задач оказываются полезными следующие формулы:

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \qquad (1)$$

$$\cos\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \qquad (2)$$

Докажем их.

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + 1}.$$

Тем самым доказана формула (1). Аналогично доказывается и формула (2):

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Формулы (1) и (2) верны лишь в том случае, когда $\cos\frac{\alpha}{2} \neq 0$, или, другими словами, когда выражение $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ определено.

Пример. Найти $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 2$.

По формулам (1) и (2) получаем:

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{4}{1+4} = 0{,}8;$$

$$\cos\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-4}{1+4} = -0{,}6.$$

Упражнения

1094. Найти $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=5$.

1095. Найти $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$, если
а) $\operatorname{tg}\alpha=-3$; б) $\operatorname{ctg}\alpha=3$.

1096. Дать тригонометрическое доказательство неравенства

$$\left|\frac{2a}{1+a^2}\right|\leqslant 1.$$

1097. Доказать, что $\sin 2\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ имеют один и тот же знак (оба отрицательны, оба положительны или оба равны нулю) при любом α.

1098. Известно, что $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$. Найти:

а) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha$;
б) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha$.

Соотношения между тригонометрическими функциями половинного угла и косинусом целого угла — § 155

Складывая и вычитая почленно тождества

$$1=\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

и

$$\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

получаем:

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}; \tag{1}$$

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}. \tag{2}$$

Эти две формулы очень часто используются для преобразования различных тригонометрических выражений. Кроме того, они позволяют выразить синус и косинус половинного угла через косинус целого угла:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}; \tag{3}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}. \tag{4}$$

Из последних двух формул, в свою очередь, вытекает тождество

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}. \tag{5}$$

Знаки (+ или —) перед радикалами в формулах (3), (4) и (5) выбираются в зависимости от того, в какой четверти оканчивается угол $\frac{\alpha}{2}$. Если, например, $\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \pi$, то в формуле (4) нужно взять знак плюс, а в формулах (3) и (5) — минус (синусы углов, оканчивающихся во 2-й четверти, положительны, а косинусы и тангенсы — отрицательны).

Примеры. 1) Найти синус и косинус угла 22°30′.

По формуле (4) получаем $\left(\frac{\alpha}{2} = 22°30', \alpha = 45°\right)$:

$$\sin 22°30' = \sqrt{\frac{1-\cos 45°}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \approx 0{,}3827.$$

Знак + перед радикалом мы выбрали потому, что синус угла 22°30′ положителен.

Аналогично, исходя из формулы (3), получим:

$$\cos 22°30' = \sqrt{\frac{1+\cos 45°}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \approx 0{,}9239.$$

2) Найти $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$.

По формуле (5) получаем $\left(\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{8}; \alpha = \frac{\pi}{4}\right)$:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2}} =$$

$$= \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1 \approx 0{,}4142.$$

Упражнения

Доказать тождества (№ 1099—1102):

1099. $1 + 2\cos 2\alpha + \cos 4\alpha = 4\cos^2\alpha \cos 2\alpha$.

1100. $1 - 2\cos 3\alpha + \cos 6\alpha = -4\sin^2\frac{3\alpha}{2} \cdot \cos 3\alpha$.

1101. $1 + \sin\alpha = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$.

1102. $1 - \sin\alpha = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$.

1103. Упростить выражение $\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$.

1104. Найти $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что $\cos 2\alpha = -0{,}6$.

1105. Найти $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если известно, что $|\cos\alpha| = 0{,}6$, причем угол α оканчивается во 2-й четверти.

1106. Найти $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin 2\alpha = \frac{1}{3}$.

Вычислить:

1107. $\sin\left(\frac{1}{2}\arccos 0{,}8\right)$.

1108. $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin 0{,}6\right)$.

1109. $\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}\arcsin(-0{,}8)\right]$.

1110. $\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(-0{,}75)\right]$.

Выражение тангенса половинного угла через синус и косинус целого угла § 156

Тангенс половинного угла можно выразить через синус и косинус целого угла с помощью формул:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}; \qquad (1)$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}. \qquad (2)$$

Действительно, $$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Тем самым доказана формула (1). Аналогично доказывается и формула (2).

Формулы (1) и (2) удобнее доказанной в § 155 формулы

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}, \qquad (3)$$

поскольку они не содержат радикала и, следовательно, не нужно решать, какой знак должен стоять перед радикалом. Однако при расчетах по формуле (3) достаточно знать лишь косинус угла α, а при расчетах по формулам (1) и (2), помимо косинуса, нужно знать и синус этого угла.

Пример: $$\operatorname{tg}15^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{1+\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2-\sqrt{3} \approx 0{,}2679.$$

Упражнения

1111. Найти $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если известно, что $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ и угол α оканчивается не в 1-й четверти.

1112. Найти $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что $\sin 2\alpha = -0{,}8$ и угол 2α оканчивается не в 4-й четверти.

1113. Доказать, что если синус и косинус угла 2α рациональны, то тангенс угла α также рационален.

Верно ли обратное утверждение?

Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму § 157

Сложив почленно тождества

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \sin\beta\cdot\cos\alpha$$

и

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \sin\beta\cdot\cos\alpha,$$

получим:

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cdot\cos\beta,$$

откуда

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]. \qquad (1)$$

Произведение синуса одного угла на косинус другого равно полусумме синуса суммы и синуса разности этих углов.

Например, $\sin 15^\circ\cdot\cos 75^\circ = \frac{1}{2}[\sin(15^\circ+75^\circ)+\sin(15^\circ-75^\circ)] =$

$$= \frac{1}{2}[\sin 90^\circ + \sin(-60^\circ)] = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right] = \frac{2-\sqrt{3}}{4}.$$

Сложив почленно тождества

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta,$$

получим:

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cdot\cos\beta,$$

откуда

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]. \qquad (2)$$

Произведение косинусов двух углов равно полусумме косинуса суммы и косинуса разности этих углов.

Например, $\cos\frac{7}{12}\pi\cdot\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{7}{12}\pi+\frac{\pi}{12}\right) + \cos\left(\frac{7}{12}\pi - \right.\right.$

$$\left.\left. - \frac{\pi}{12}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{2}{3}\pi + \cos\frac{\pi}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2} + 0\right] = -\frac{1}{4}.$$

Если из тождества

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

вычесть почленно тождество

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta,$$

то в результате получим:

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2\sin\alpha \cdot \sin\beta,$$

откуда

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]. \quad (3)$$

Произведение синусов двух углов равно полуразности косинуса разности и косинуса суммы этих углов.

Упражнения

Вычислить, не пользуясь таблицами (№ 1114—1119):

1114. $2\sin 37°30'\cos 7°30'$.
1115. $\sin 52°30'\cos 7°30'$.
1116. $\cos 37°30'\cos 7°30'$.
1117. $\sin 52°30'\sin 7°30'$.
1118. $\cos 75°\cos 105°$.
1119. $\sin 45°\sin 15°$.

Данные произведения представить в виде сумм (№ 1120—1127):

1120. $\sin 3° \cdot \sin 5°$.
1121. $\sin 7° \cdot \cos 9°$.
1122. $\cos 17° \cdot \cos 3°$.
1123. $\sin(x + \alpha) \cdot \sin(x - \alpha)$.
1124. $\sin(x + \alpha) \cdot \cos(x - \alpha)$.
1125. $\cos(x + \alpha) \cdot \cos(x - \alpha)$.
1126. $4\sin 20° \cdot \cos 50° \cdot \cos 80°$.
1127. $4\cos 15° \cdot \sin 20° \cdot \sin 40°$.

Доказать тождества:

1128. $2\sin 2\alpha \sin\alpha + \cos 3\alpha = \cos\alpha$.

1129. $\sin\alpha - 2\sin\left(\frac{\alpha}{2} - 15°\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2} + 15°\right) = \frac{1}{2}$.

Преобразование суммы (разности) синусов двух углов в произведение § 158

В предыдущем параграфе мы получили формулу

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]. \quad (1)$$

Эта формула верна для любых значений α и β. Пусть α и β таковы, что $\alpha + \beta = x$, $\alpha - \beta = y$. Тогда α и β найдутся как решение системы уравнений

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x, \\ \alpha - \beta = y. \end{cases}$$

Складывая эти уравнения почленно, получаем $2\alpha = x + y$. Вычитая эти уравнения почленно, получаем $2\beta = x - y$. Поэтому

$$\alpha = \frac{x+y}{2}; \quad \beta = \frac{x-y}{2}.$$

В таком случае тождество (1) можно переписать в виде:

$$\sin\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2} = \frac{1}{2}(\sin x + \sin y),$$

откуда

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}. \qquad (2)$$

Сумма синусов двух углов равна удвоенному произведению синуса полусуммы на косинус полуразности этих углов.

Заменяя в формуле (2) y на $-y$ и учитывая, что $\sin(-y) = -\sin y$, получаем:

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}. \qquad (3)$$

Разность синусов двух углов равна удвоенному произведению синуса полуразности на косинус полусуммы этих углов.

Примеры. 1) Сумму $\sin 75° + \sin 15°$ легко вычислить без таблиц, если использовать формулу (2):

$$\sin 75° + \sin 15° = 2\sin\frac{75°+15°}{2} \cdot \cos\frac{75°-15°}{2} =$$

$$= 2\sin 45° \cdot \cos 30° = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{6}.$$

2) Разность $\sin\frac{5}{12}\pi - \sin\frac{\pi}{12}$ легко вычислить без таблиц, если использовать формулу (3):

$$\sin\frac{5}{12}\pi - \sin\frac{\pi}{12} = 2\sin\frac{\frac{5}{12}\pi - \frac{\pi}{12}}{2} \cdot \cos\frac{\frac{5}{12}\pi + \frac{\pi}{12}}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\pi}{6} \cdot \cos\frac{\pi}{4} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Упражнения

Вычислить (№ 1130 — 1135) без таблиц, используя формулы для суммы и разности синусов двух углов:

1130. $\sin 105° + \sin 75°$. **1131.** $\sin 105° - \sin 75°$.

1132. $\sin\frac{11}{12}\pi + \sin\frac{5}{12}\pi$.

1133. $\sin\frac{11}{12}\pi - \sin\frac{5}{12}\pi$.

1134. $\cos\frac{\pi}{12} + \sin\frac{7}{12}\pi$.

1135. $\cos\frac{\pi}{12} - \sin\frac{7}{12}\pi$.

Упростить данные выражения (№ 1136, 1137).

1136. $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$.

1137. $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$.

1138. Доказать тождества:

$$1 + \sin\alpha = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$1 - \sin\alpha = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right),$$

используя формулы для суммы и разности синусов двух углов.

Данные выражения (№ 1139, 1140) представить в виде произведений:

1139. $\frac{1}{2} + \sin\alpha$.

1140. $\sqrt{3} - 2\sin\alpha$.

1141. Доказать, что синусы углов α и β равны тогда и только тогда, когда

$$\alpha = (-1)^n\beta + n\pi,$$

где n — некоторое целое число.

Преобразование суммы (разности) косинусов двух углов в произведение § 159

Для суммы и разности косинусов двух углов верны следующие формулы:

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}; \quad (1)$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}. \quad (2)$$

Сумма косинусов двух углов равна удвоенному произведению косинуса полусуммы на косинус полуразности этих углов.

Разность косинусов двух углов равна минус удвоенному произведению синуса полусуммы на синус полуразности этих углов.

Примеры. 1) $\cos 75^\circ + \cos 15^\circ = 2\cos\frac{75^\circ+15^\circ}{2}\cdot\cos\frac{75^\circ-15^\circ}{2} =$

$$= 2\cos 45^\circ\cdot\cos 30^\circ = 2\,\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

2) $\cos\frac{5}{12}\pi - \cos\frac{\pi}{12} = -2\sin\frac{\frac{5}{12}\pi + \frac{\pi}{12}}{2} \cdot \sin\frac{\frac{5}{12}\pi - \frac{\pi}{12}}{2} =$

$= -2\sin\frac{\pi}{4} \cdot \sin\frac{\pi}{6} = -2\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$

Формулы (1) и (2) могут быть получены многими способами. Докажем, например, формулу (1).

1-й способ. В § 157 была доказана формула

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)].$$

Полагая в ней $\alpha + \beta = x$, $\alpha - \beta = y$, мы и приходим к формуле (1). Этот способ аналогичен тому, с помощью которого в предыдущем параграфе была получена формула для суммы синусов двух углов.

2-й способ. В предыдущем параграфе была доказана формула

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Полагая в ней $\alpha = x + \frac{\pi}{2}$, $\beta = y + \frac{\pi}{2}$, получаем:

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}+\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\frac{x-y}{2}.$$

Но по формулам приведения $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x$; $\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right) =$ $= \cos y$; $\sin\left(\frac{x+y}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{x+y}{2}$. Следовательно, $\cos x + \cos y =$ $= 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$, что и требовалось доказать.

Формулу (2) мы предлагаем учащимся доказать самостоятельно. Попробуйте найти не менее двух различных способов доказательства!

Упражнения

Вычислить (№ 1142—1147) без таблиц, используя формулы для суммы и разности косинусов двух углов:

1142. $\cos 105° + \cos 75°$.

1143. $\cos 105° - \cos 75°$.

1144. $\cos\frac{11}{12}\pi + \cos\frac{5}{12}\pi$.

1145. $\cos\frac{11}{12}\pi - \cos\frac{5}{12}\pi$.

1146. $\cos 15° - \sin 15°$.

1147. $\sin\frac{\pi}{12} + \cos\frac{11}{12}\pi$.

Упростить данные выражения (№ 1148, 1149).

1148. $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$.

1149. $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$.

1150. Каждое из тождеств

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$$

доказать не менее чем двумя различными способами.

Данные выражения (№ 1151 — 1154) представить в виде произведений:

1151. $\sqrt{2} + 2\cos\alpha$. **1153.** $\sin x + \cos y$.

1152. $\sqrt{3} - 2\cos\alpha$. **1154.** $\sin x - \cos y$.

1155. Упростить выражение $\sin^2\left(\alpha - \frac{\pi}{8}\right) - \cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{8}\right)$.

Разложить на множители данные выражения (№ 1156—1159):

1156. $1 + \sin\alpha - \cos\alpha$.

1157. $\sin\alpha + \sin(\alpha + \beta) + \sin\beta$.

1158. $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha$.

1159. $1 + \sin\alpha + \cos\alpha$.

Доказать данные тождества (№ 1160—1163):

1160. $\dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$.

1161. $\dfrac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)} = \operatorname{tg}\alpha$.

1162. $\dfrac{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)} = -\operatorname{ctg}\alpha$.

1163. $\dfrac{\sin\alpha - 2\sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha - 2\cos 2\alpha + \cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$.

1164. Доказать, что косинусы углов α и β равны тогда и только тогда, когда

$$\alpha = \pm\beta + 2n\pi,$$

где n — некоторое целое число.

Преобразование суммы (разности) тангенсов двух углов § 160

При решении некоторых задач бывают полезны следующие формулы:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x + y)}{\cos x \cdot \cos y}; \quad (1)$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x - y)}{\cos x \cdot \cos y}. \quad (2)$$

Сумма тангенсов двух углов равна отношению синуса суммы этих углов к произведению косинусов тех же углов.

Разность тангенсов двух углов равна отношению синуса разности этих углов к произведению косинусов тех же углов.

Докажем, например, формулу (1). Имеем: $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y}$; но $\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y = \sin(x + y)$, поэтому $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y}$. Тем самым формула (1) доказана. Аналогично доказывается и формула (2).

Пример. Доказать, что тангенсы углов $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ и $\beta \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ равны тогда и только тогда, когда эти углы разнятся на угол, кратный π.

Пусть α и β разнятся на угол, кратный π; тогда $\alpha = \beta + n\pi$, где n — некоторое целое число. Но в таком случае

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\beta + n\pi) = \operatorname{tg}\beta.$$

Обратно, пусть $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = 0$ и по формуле (2)

$$\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} = 0.$$

Но это возможно лишь при условии, что $\sin(\alpha - \beta) = 0$. Как известно, синус обращается в нуль лишь для углов, кратных π. Поэтому

$$\alpha - \beta = n\pi,$$
$$\alpha = \beta + n\pi,$$

что и требовалось доказать.

Упражнения

Вычислить (№ 1165—1168), не пользуясь тригонометрическими таблицами:

1165. $\operatorname{tg} 22°30' + \operatorname{tg} 67°30'$.

1166. $\operatorname{tg} 22°30' - \operatorname{tg} 67°30'$.

1167. $\operatorname{tg}\frac{11}{12}\pi + \operatorname{tg}\frac{5}{12}\pi$.

1168. $\operatorname{tg}\frac{11}{12}\pi - \operatorname{tg}\frac{5}{12}\pi$.

1169. Упростить выражение

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}.$$

1170. Данные выражения представить в виде произведений:

а) $\sqrt{3} - \operatorname{tg}\alpha$; б) $1 + \operatorname{tg}\alpha$.

1171. Найти условие, при котором котангенсы углов α и β равны между собой.

Доказать тождества:

1172. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = 2\operatorname{tg}\alpha$.

1173. $\dfrac{1+\operatorname{ctg} 2\alpha}{1-\operatorname{ctg} 2\alpha}=\dfrac{\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)}$.

Графики тригонометрических функций кратных углов § 161

В главе V (часть I) мы показали, как строятся графики тригонометрических функций $y=\sin x$; $y=\cos x$; $y=\operatorname{tg} x$; $y=\operatorname{ctg} x$. Теперь мы рассмотрим вопрос о том, как строить графики тригонометрических функций кратных углов ωx, где ω — некоторое положительное число*.

Для построения графика функции $y=\sin \omega x$ сравним эту функцию с уже изученной нами функцией $y=\sin x$. Предположим, что при $x=x_0$ функция $y=\sin x$ принимает значение, равное y_0. Тогда

$$y_0=\sin x_0.$$

Преобразуем это соотношение следующим образом:

$$y_0=\sin\left(\frac{\omega}{\omega}x_0\right)=\sin\left[\omega\left(\frac{x_0}{\omega}\right)\right].$$

Итак,

$$y_0=\sin\left[\omega\left(\frac{x_0}{\omega}\right)\right].$$

Следовательно, функция $y=\sin \omega x$ при $x=\dfrac{x_0}{\omega}$ принимает то же самое значение y_0, что и функция $y=\sin x$ при $x=x_0$. А это означает, что функция $y=\sin \omega x$ повторяет свои значения в ω раз чаще, чем функция $y=\sin x$. Поэтому график функции $y=\sin \omega x$ получается путем «сжатия» графика функции $y=\sin x$ в ω раз вдоль оси x.

Например, график функции $y=\sin 2x$ получается путем «сжатия» синусоиды $y=\sin x$ вдвое вдоль оси абсцисс (рис. 221).

График функции $y=\sin\dfrac{x}{2}$ получается путем «растяжения» синусоиды $y=\sin x$ в два раза (или «сжатия» в $\dfrac{1}{2}$ раза) вдоль оси x (рис. 222).

Поскольку функция $y=\sin \omega x$ повторяет свои значения в ω раз чаще, чем функция $y=\sin x$, то период ее в ω раз меньше периода функции $y=\sin x$. Например, период функции $y=\sin 2x$ равен $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$, а период функции $y=\sin\dfrac{x}{2}$ равен $\dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$.

---

* ω — греческая буква; читается: омега.

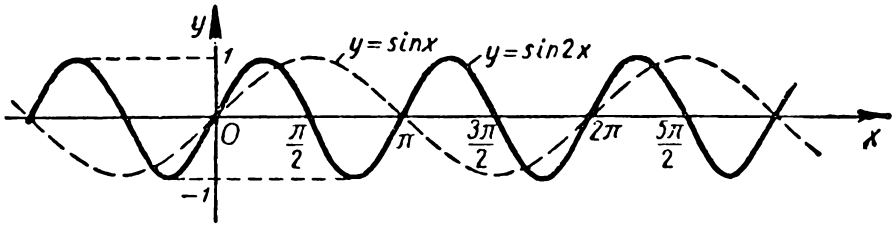

Рис. 221.

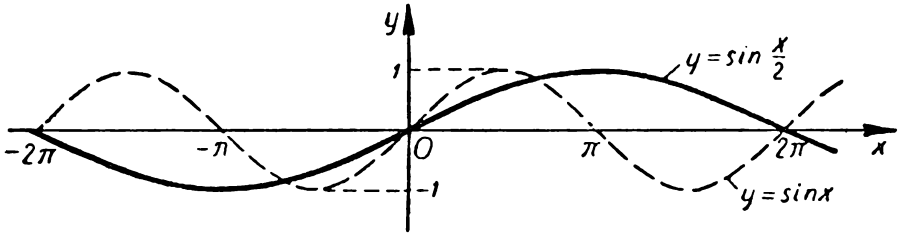

Рис. 222.

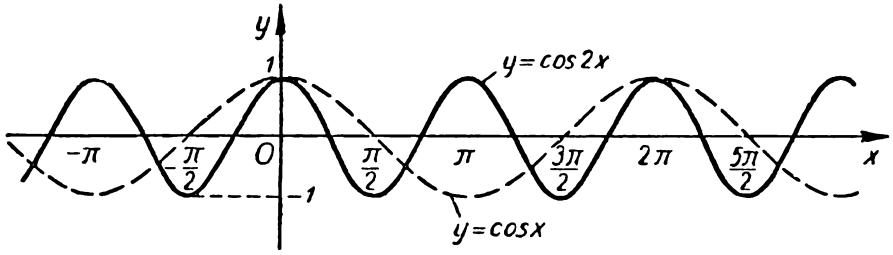

Рис. 223.

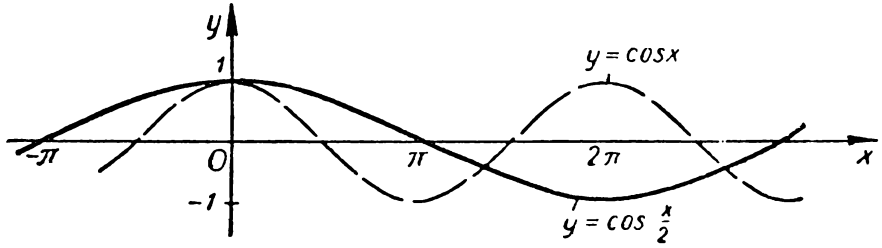

Рис. 224.

Аналогично строятся графики и других тригонометрических функций кратных углов. На рисунке 223 представлен график функции $y = \cos 2x$, который получается путем «сжатия» косинусоиды $y = \cos x$ в два раза вдоль оси абсцисс. График функции $y = \cos \frac{x}{2}$ (рис. 224) получается путем «растяжения» косинусоиды $y = \cos x$ вдвое вдоль оси x.

На рисунке 225 вы видите график функции $y = \operatorname{tg} 2x$, полученный «сжатием» тангенсоиды $y = \operatorname{tg} x$ вдвое вдоль оси абсцисс, а на рисунке 226 — график функции $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, полученный «растяжением» тангенсоиды $y = \operatorname{tg} x$ вдвое вдоль оси x.

Упражнения

Построить графики данных функций (№ 1174—1181) и указать координаты точек пересечения этих графиков с осями координат. Определить периоды данных функций.

1174. $y = \sin \frac{4}{3} x$. **1177.** $y = \operatorname{tg} \frac{5}{6} x$. **1180.** $y = \cos \frac{2}{3} x$.

1175. $y = \cos \frac{5}{3} x$. **1178.** $y = \operatorname{ctg} \frac{5}{3} x$. **1181.** $y = \operatorname{ctg} \frac{x}{3}$.

1176. $y = \operatorname{tg} \frac{4}{3} x$. **1179.** $y = \sin \frac{2}{3} x$.

1182. Определить периоды функций $y = \sin(\pi x)$ и $y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} x\right)$.

1183. Приведите два примера функций, которые принимают все значения от -1 до $+1$ (включая эти два числа) и изменяются периодически с периодом 10.

1184*. Приведите два примера функций, которые принимают все значения от 0 до 1 (включая эти два числа) и изменяются периодически с периодом $\frac{\pi}{2}$.

1185. Приведите два примера функций, которые принимают все действительные значения и изменяются периодически с периодом 1.

1186*. Приведите два примера функций, которые принимают все отрицательные значения и нуль, но не принимают положительные значения и изменяются периодически с периодом 5.

Графики функций $y = A \sin \omega x$, $y = A \cos \omega x$, $y = A \operatorname{tg} \omega x$, $y = A \operatorname{ctg} \omega x$ § 162

Пусть $A > 0$. Тогда если $y = A \sin \omega t > 0$, то значения этой функции в A раз больше соответствующих значений функции $y = \sin \omega t$; если же $y = A \sin \omega t < 0$, то значения этой функции в A раз меньше соответствующих значений функции $y = \sin \omega t$. Поэтому кривая $y = A \sin \omega t$ получается путем «растяжения» кривой $y = \sin \omega x$ в A раз в вертикальном направлении.

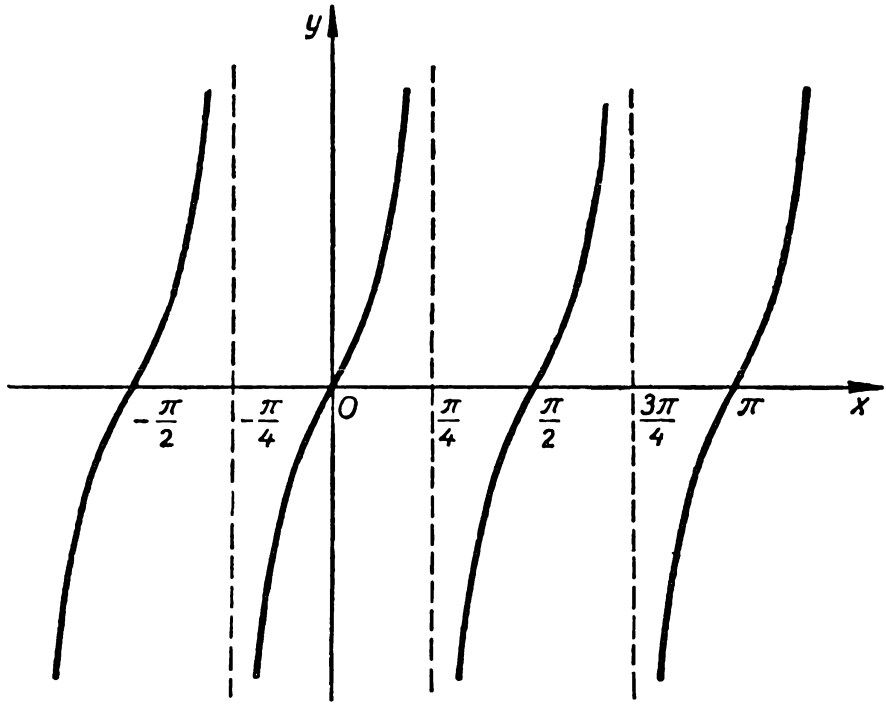

Рис. 225.

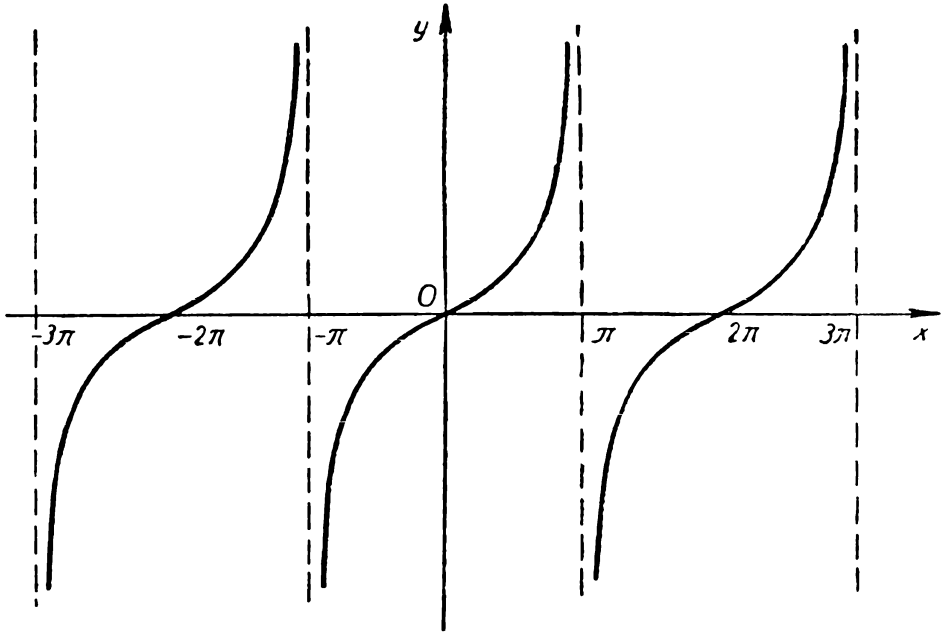

Рис. 226.

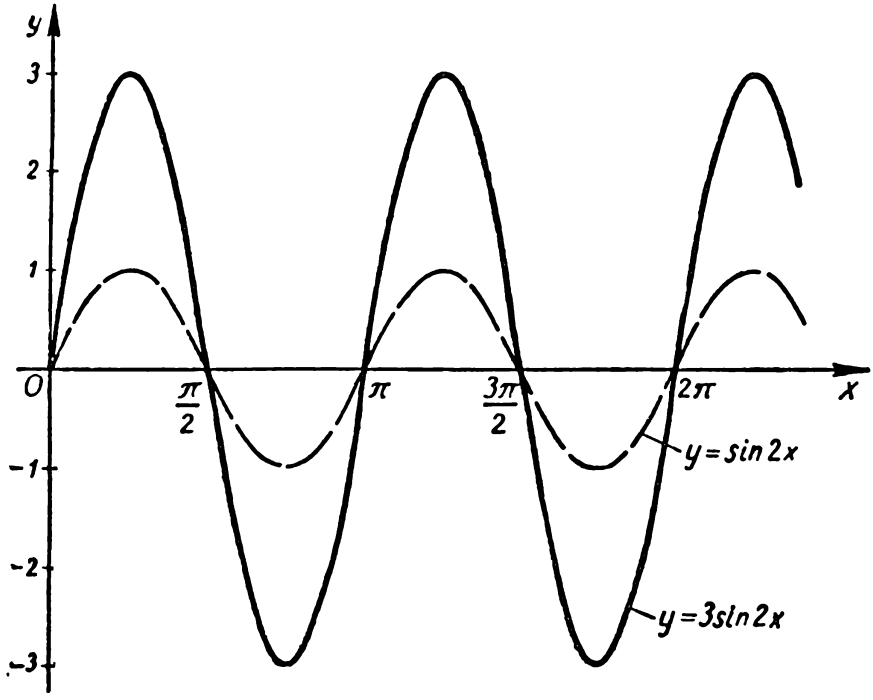

Рис. 227.

Например, кривая $y = 3 \sin 2x$ (рис. 227) получается путем «растяжения» кривой $y = \sin 2x$ в вертикальном направлении втрое. Аналогично, кривая $y = \frac{1}{3} \sin 2x$ (рис. 228) получается путем «сжатия» кривой $y = \sin 2x$ в вертикальном направлении втрое (или путем «растяжения» в $\frac{1}{3}$ раза).

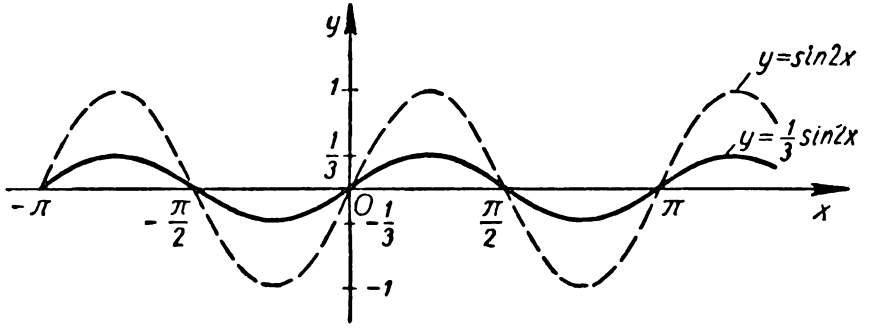

Рис. 228.

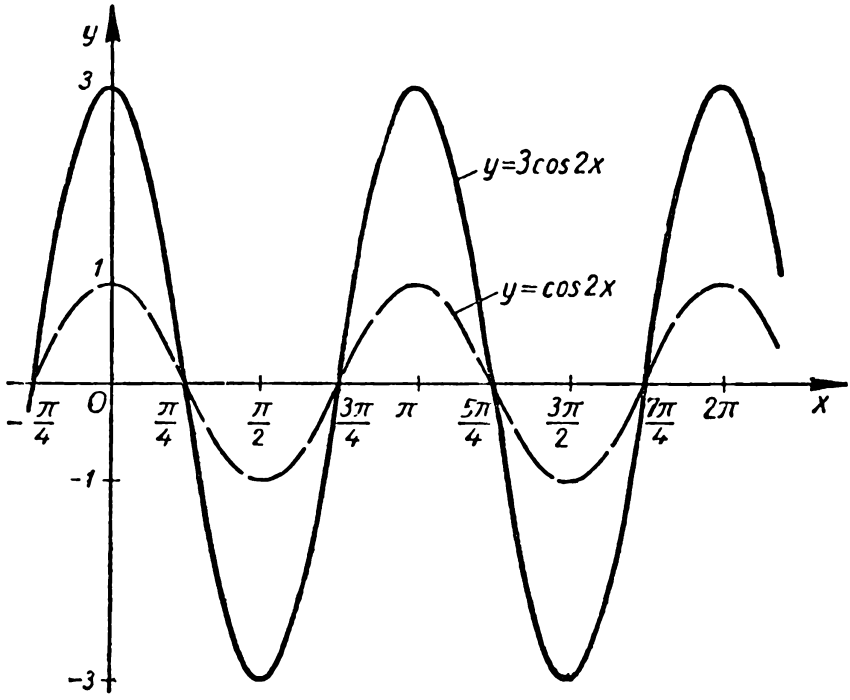

Рис 229.

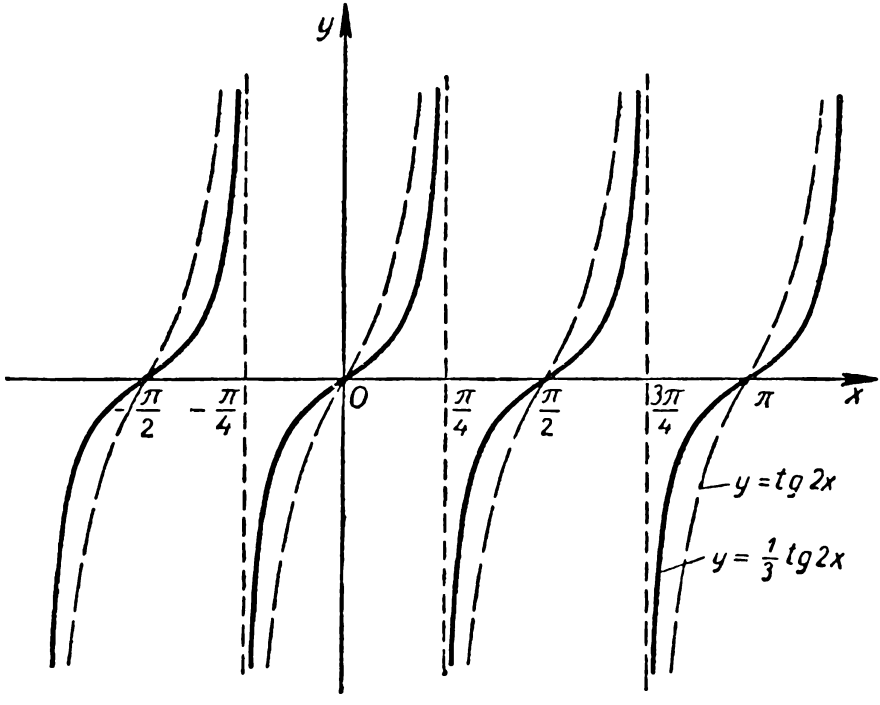

Рис 230

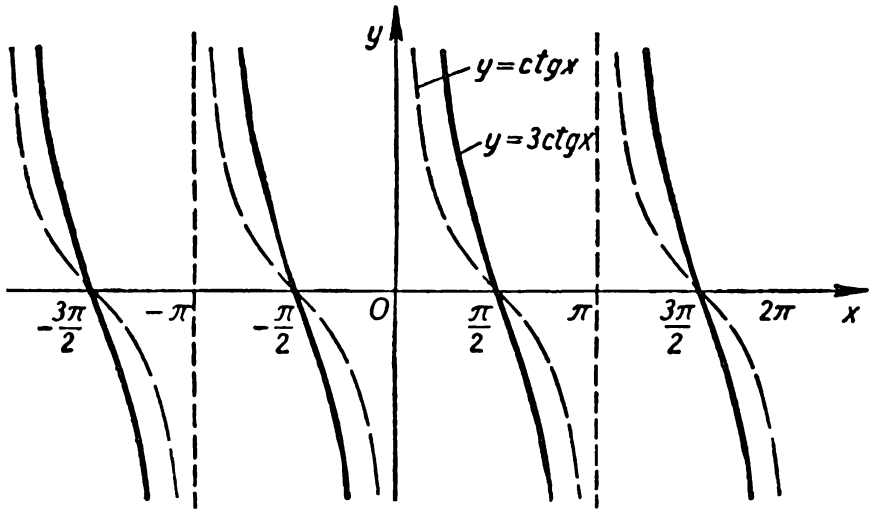

Рис. 231.

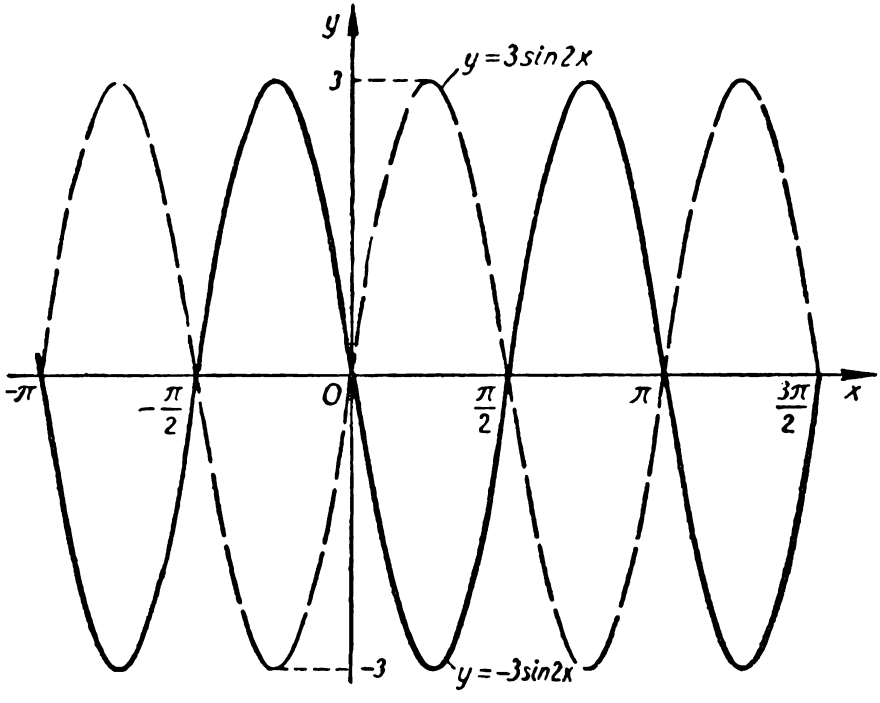

Рис. 232.

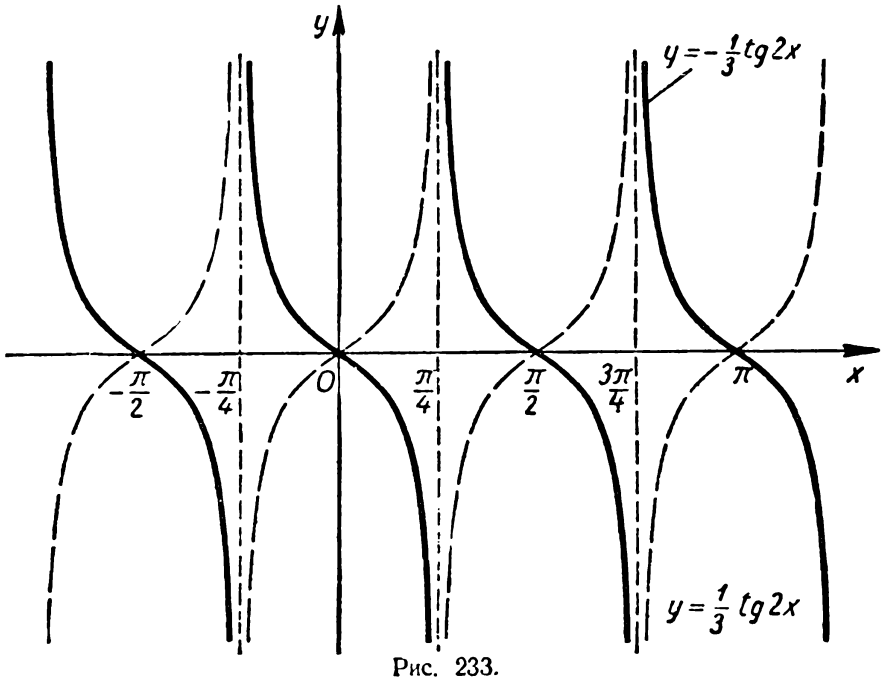

Рис. 233.

Аналогично строятся и графики функций $y = A\cos\omega x$, $y = A\,\mathrm{tg}\,\omega x$, $y = A\,\mathrm{ctg}\omega x$. На рисунке 229 представлен график функции $y = 3\cos 2x$, на рисунке 230 — график функции $y = \frac{1}{3}\mathrm{tg}\,2x$, на рисунке 231 — график функции $y = 3\,\mathrm{ctg}\,x$.

Если $A < 0$, то для построения графика функции $y = A\sin\omega x$ предварительно следует построить график функции $y = |A|\sin\omega x$, а затем отобразить его симметрично относительно оси x. На рисунке 232, например, показано построение графика функции $y = -3\sin 2x$. Аналогично строится график функции $y = -\frac{1}{3}\mathrm{tg}\,2x$ (рис. 233).

Отметим, что периоды функций $y = A\sin\omega x$, $y = A\cos\omega x$, $y = A\,\mathrm{tg}\,\omega x$, $y = A\,\mathrm{ctg}\,\omega x$ $(A \neq 0)$ не зависят от A.

Упражнения

Построить графики данных функций (№ 1187 — 1196) и указать координаты точек пересечения этих графиков с осями координат. Определить периоды данных функций:

1187. $y = \sin 3x$.

1188. $y = -3\sin 2x$.

1189. $y = \frac{1}{2}\sin 3x$.

1190. $y = \frac{1}{2}\sin\left(-\frac{x}{3}\right)$.

1191. $y = -\frac{1}{3}\cos 2x$.

1192. $y = -2\cos\frac{x}{2}$.

1193. $y = -2\cos(-3x)$. **1195.** $y = -\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x$.

1194. $y = 2\operatorname{tg}\frac{x}{3}$. **1196.** $y = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(-\frac{x}{3}\right)$.

1197. Приведите два примера функций, которые принимали бы все значения от $-\frac{1}{2}$ до $+\frac{1}{2}$, включая эти два числа, изменяясь периодически с периодом $\frac{\pi}{2}$.

1198*. Приведите пример функции, которая принимает все значения, по модулю большие чем 5, и изменяется периодически с периодом $\frac{1}{5}$.

Графики тригонометрических функций $y = A\sin[\omega(x+\alpha)]$, $y = A\cos[\omega(x+\alpha)]$ и т. д. § 163

Начнем с простого примера. Пусть нам требуется построить график функции $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$. Для этого сравним данную функцию с функцией $y = \sin x$, график которой мы уже умеем строить.

Пусть данная функция $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ при $x = x_0$ принимает некоторое значение, равное y_0. Тогда

$$y_0 = \sin\left(x_0 + \frac{\pi}{3}\right).$$

Но в таком случае функция $y = \sin x$ должна принять то же самое значение y_0 при $x = x_0 + \frac{\pi}{3}$. Таким образом, все значения, которые принимает функция $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, принимает и функция $y = \sin x$. Если x толковать как время, то можно сказать, что каждое значение y_0 функцией $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ принимается на $\frac{\pi}{3}$ единицы времени раньше, чем функцией $y = \sin x$. Отсюда вытекает, что график функции $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ получается посредством сдвига синусоиды $y = \sin x$ по оси абсцисс *влево* на $\frac{\pi}{3}$ (рис. 234).

Аналогично можно было бы построить и графики таких функций, как $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$, $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ и т. д.

Заметим, что с подобными задачами мы уже сталкивались в § 120, ч. 1, при построении графика функции

$$y = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

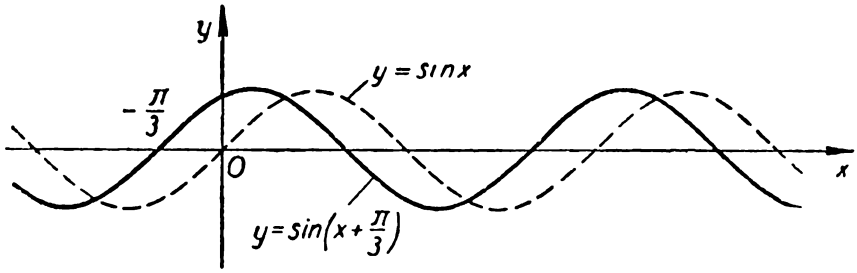

Рис. 234.

Если бы нам нужно было построить график функции $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, то рассуждения, аналогичные приведенным выше, дали бы такой результат. Функция $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ принимает те же значения, что и функция $y = \sin x$, только с запаздыванием во времени (если аргумент x интерпретировать как время) на $\frac{\pi}{3}$. Поэтому график функции $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ получается посредством сдвига синусоиды $y = \sin x$ по оси абсцисс *вправо* на $\frac{\pi}{3}$ (рис. 235).

Аналогично можно было бы построить и графики таких функций, как $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$, $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ и т. д.

Теперь рассмотрим более сложные примеры. Пусть нам нужно построить график функции

$$y = A \sin [\omega (x + \alpha)].$$

Для этого сравним данную функцию с функцией

$$y = A \sin \omega x,$$

график которой мы уже умеем строить (см. § 162). Предположим, что функция $y = A \sin [\omega (x + \alpha)]$ при $x = x_0$ принимает некоторое значение, равное y_0. Тогда

$$y_0 = A \sin [\omega (x_0 + \alpha)].$$

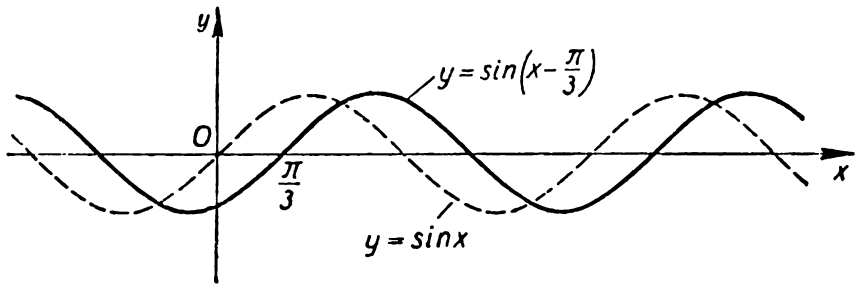

Рис. 235.

Это соотношение показывает, что функция $y = A \sin \omega x$ при $x = x_0 + \alpha$ принимает то же самое значение y_0. Поэтому все те значения, которые принимает функция $y = A \sin [\omega (x + \alpha)]$, принимает и функция $y = A \sin \omega x$. При этом каждое значение y_0 принимается первой функцией на α единиц времени (если x толковать как время) раньше, чем второй функцией. Но это означает, что график $y = A \sin [\omega (x + \alpha)]$ получается посредством сдвига графика функции $y = A \sin \omega x$ по оси абсцисс *влево* на α.

Например, кривая $y = 3 \sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right]$ получается посредством сдвига кривой $y = 3 \sin 2x$ влево по оси абсцисс на $\frac{\pi}{4}$ (рис. 236).

Кривая $y = -3 \cos\left[2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right]$ получается посредством сдвига кривой $y = -3 \cos 2x$ влево по оси абсцисс на расстояние $\frac{\pi}{3}$ (рис. 237).

Аналогично могут быть построены графики таких функций, как $y = A \sin [\omega (x - \alpha)]$, $y = A \cos [\omega (x - \alpha)]$ и т. д. Они получаются соответственно посредством сдвига графиков функций $y = A \sin \omega x$, $y = A \cos \omega x$ и т. д. *вправо* по оси абсцисс на расстояние α.

На рисунке 238 (стр. 38) вы видите график функции $y = 3 \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]$, полученный посредством сдвига графика функции $y = 3 \sin 2x$ вправо по оси абсцисс на расстояние $\frac{\pi}{4}$.

На рисунке 239 представлен график функции $y = \frac{1}{3} \operatorname{ctg}\left[2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right]$, полученный посредством сдвига графика функции $y = \frac{1}{3} \operatorname{ctg} 2x$ вправо по оси абсцисс на расстояние $\frac{\pi}{3}$.

Заметим, что период функции $y = A \sin [\omega (x + \alpha)]$, как и периоды других аналогичных тригонометрических функций, не зависит от α.

Упражнения

Построить графики данных функций (№ 1199—1205) и указать координаты точек пересечения этих графиков с осями координат. Определить периоды данных функций:

1199. а) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; г) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$;

б) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; д) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;

в) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; е) $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

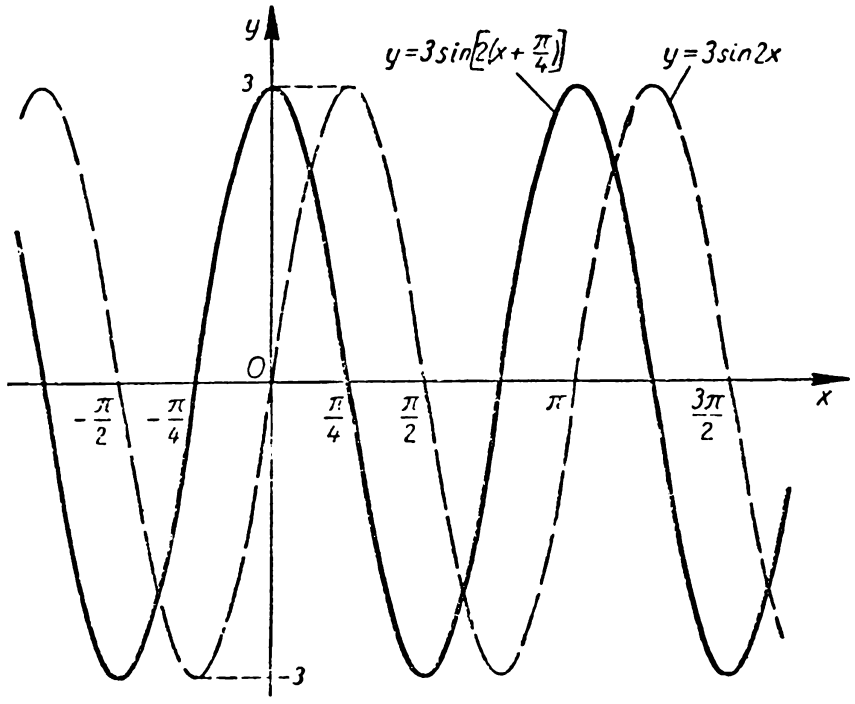

Рис. 236.

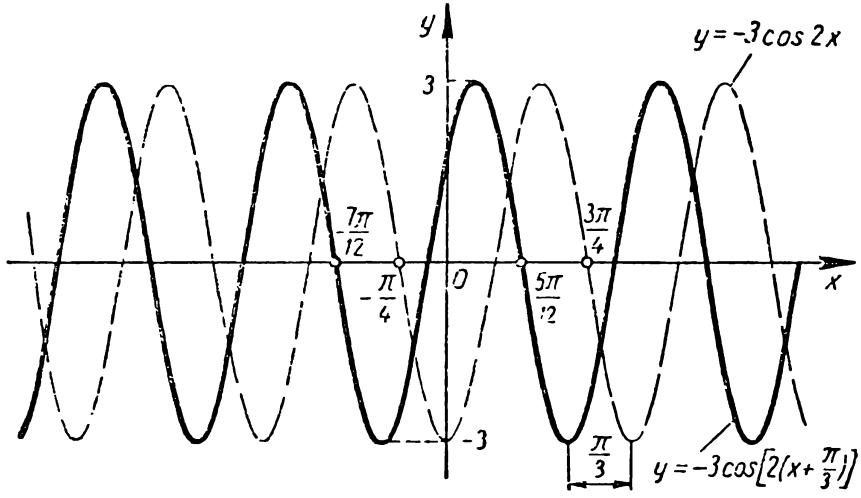

Рис. 237.

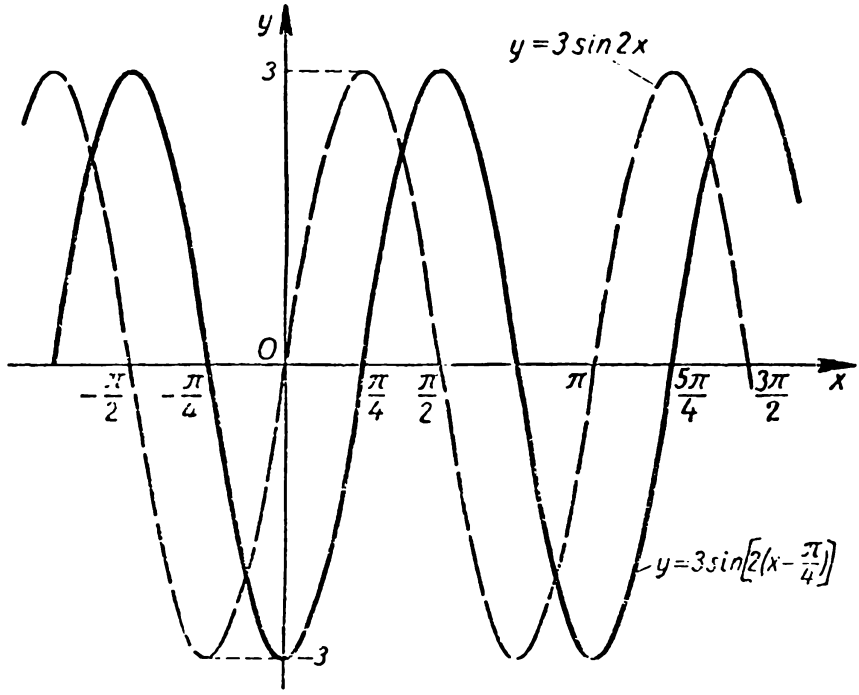

Рис. 238

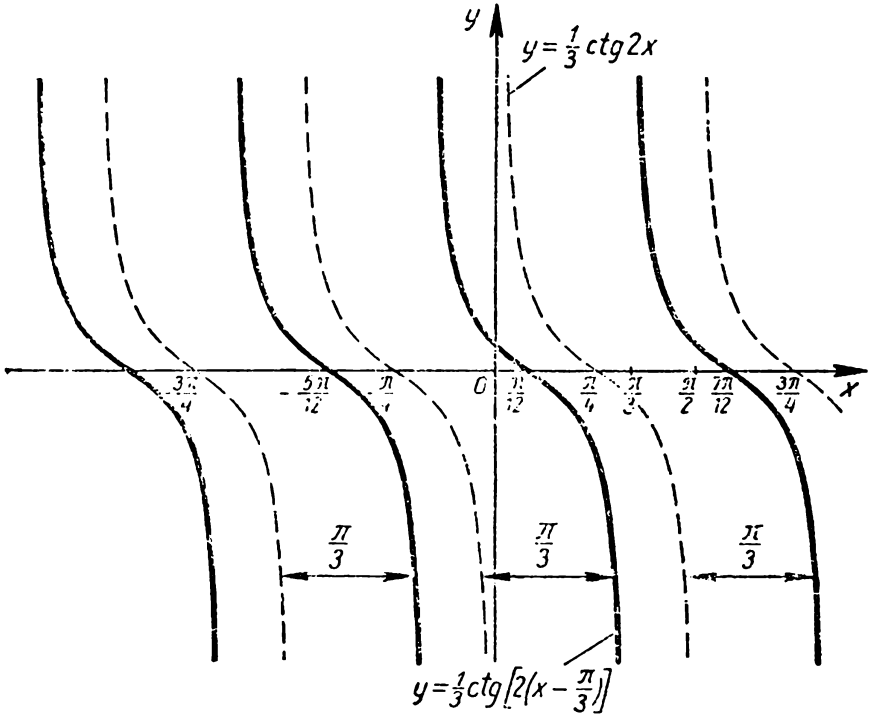

Рис. 239.

1200. $y = 2\sin\left[\frac{3}{2}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right]$.

1201. $y = \frac{1}{2}\cos\left[\frac{3}{2}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right]$.

1202. $y = -\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left[2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right]$.

1203. $y = \frac{1}{2}\sin\left[\frac{1}{3}(x - \pi)\right]$.

1204. $y = -2\cos\left[\frac{2}{3}(x - \pi)\right]$.

1205. $y = 2\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]$.

Графики функций $y = A\sin(\omega x + \alpha)$, $y = A\cos(\omega x + \alpha)$ и т. д. § 164

Пусть нужно построить график функции $y = 3\sin(2x - 5)$. Представим эту функцию в виде $y = 3\sin\left[2\left(x - \frac{5}{2}\right)\right]$. После этого нетрудно понять, в какой последовательности следует выполнять построение.

1. «Сжимая» синусоиду $y = \sin x$ по оси x вдвое, получаем кривую $y = \sin 2x$ (рис. 240, кривая I).

2. Путем «растяжения» кривой $y = \sin 2x$ в вертикальном направлении в 3 раза получаем кривую $y = 3\sin 2x$ (рис. 240, кривая II).

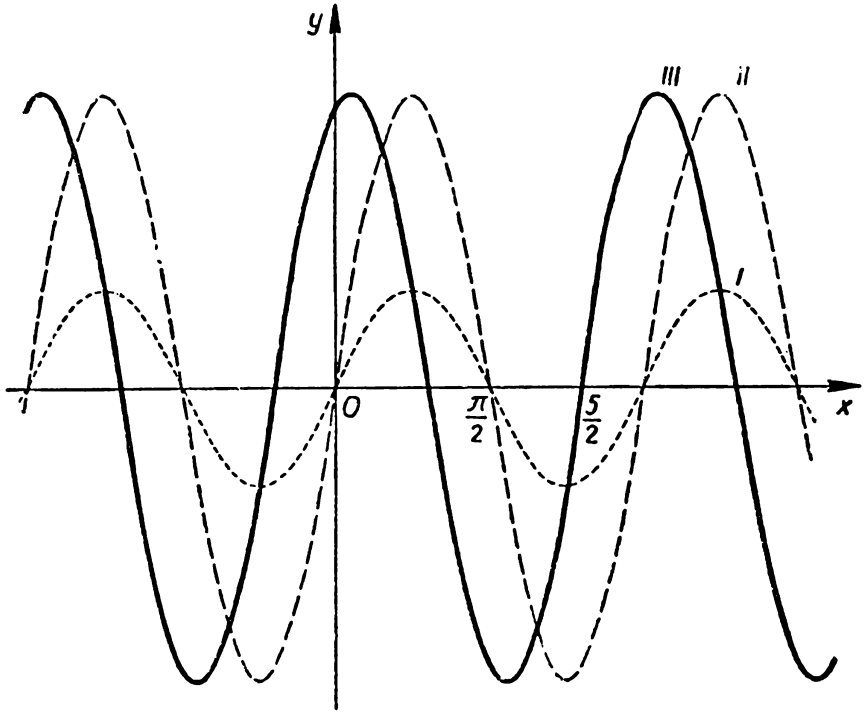

Рис. 240.

3. Смещая кривую $y = 3 \sin 2x$ вправо на расстояние в $\frac{5}{2}$ единицы масштаба, получаем график функции $y = 3 \sin (2x - 5)$ (рис. 240, кривая III).

Аналогично строится график функции $y = A \sin (\omega x + \alpha)$ и при любых других значениях A, ω, α.

На том же принципе основано построение графиков функций $y = A \cos (\omega x + \alpha)$, $y = A \operatorname{tg} (\omega x + \alpha)$, $y = A \operatorname{ctg} (\omega x + \alpha)$. Например, для построения графика функции $y = \frac{1}{3} \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ сначала представим ее в виде $y = \frac{1}{3} \operatorname{tg}\left[2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right]$; после этого:

1) «сжимая» тангенсоиду $y = \operatorname{tg} x$ по оси x вдвое, получаем график функции $y = \operatorname{tg} 2x$ (рис. 241, кривая I);

2) «сжимая» кривую $y = \operatorname{tg} 2x$ в вертикальном направлении в три раза, получаем кривую $y = \frac{1}{3} \operatorname{tg} 2x$ (рис. 241, кривая II);

3) перенося кривую $y = \frac{1}{3} \operatorname{tg} 2x$ влево на расстояние $\frac{\pi}{6}$, получаем график функции $y = \frac{1}{3} \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ (рис. 241, кривая III).

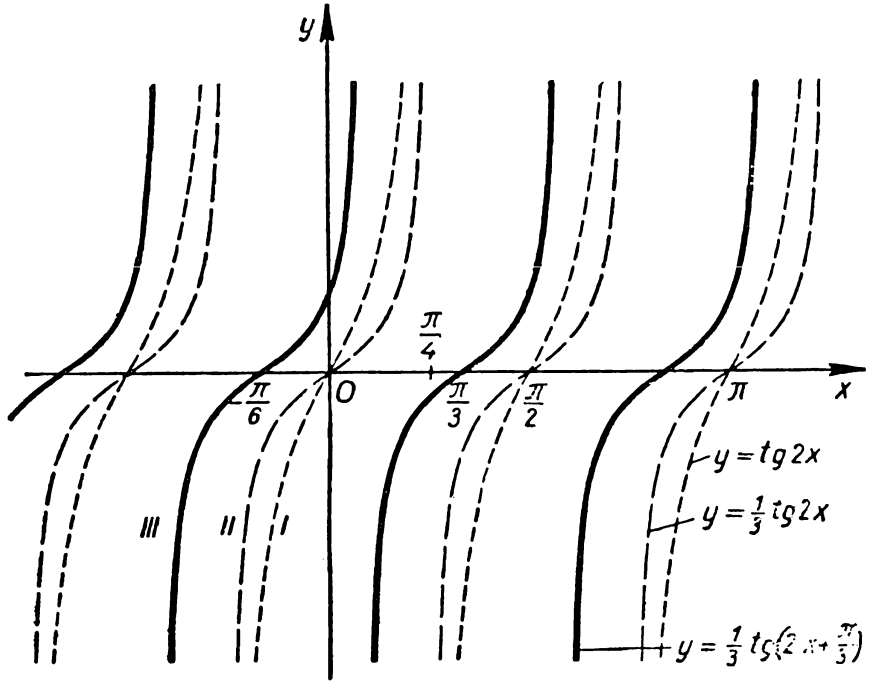

Рис 241.

Упражнения

Построить графики данных функций (№ 1206—1213) и указать координаты точек пересечения этих графиков с осями координат. Определить периоды данных функций. Каковы экстремальные (то есть минимальные и максимальные) значения этих функций?

1206. $y = 2\sin(3x - 2)$.

1207. $y = \frac{1}{2}\sin(3x - 3)$.

1208. $y = 2\sin\left(\frac{1}{3}x + \frac{2\pi}{3}\right)$.

1209. $y = 2\cos\left(1 - \frac{x}{2}\right)$.

1210. $y = -\frac{3}{2}\cos(3x + 2)$.

1211. $y = -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{3}x - \frac{2\pi}{3}\right)$.

1212. $y = \frac{1}{3}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}\right)$.

1213. $y = 3\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$.

Гармоническое колебание § 165

Пусть точка M (рис. 242) движется по окружности радиуса A против часовой стрелки равномерно с постоянной угловой скоростью ω радианов в секунду. Если в начальный момент времени ($t = 0$) эта точка занимала положение M_0, определяемое углом φ, то через t секунд она займет некоторое положение M, определяемое углом $\omega t + \varphi$.

В то время как точка M движется по окружности, ее проекция P на ось ординат совершает колебания вдоль диаметра CD, достигая то наивысшего положения C, то наинизшего положения D. Чтобы математически описать это колебание, выразим ординату точки P через угол φ, угловую скорость ω и текущее время t. Отношение этой ординаты y к радиусу окружности A является синусом угла, который образует вектор $\overrightarrow{OM}$ с осью x. Но этот угол в момент времени t, как указано выше, равен $\omega t + \varphi$. Поэтому $\frac{y}{A} = \sin(\omega t + \varphi)$, откуда

$$y = A\sin(\omega t + \varphi). \qquad (1)$$

Формула (1) и представляет собой закон колебания проекции точки M на ось ординат. Колебания такого рода получили название *гармонических колебаний*.

Формула гармонического колебания $y = A\sin(\omega t + \varphi)$ определяет y как функцию времени t. Максимальное значение этой функции равно, очевидно, A, а минимальное ($-A$). Следовательно, все значения этой функции заключены между $-A$ и A. Поэтому A называется *амплитудой колебания*.

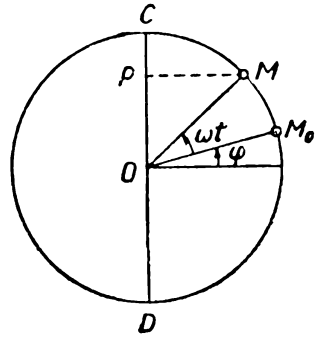

Рис. 242.

Переменный угол $\omega t + \varphi$ называется *фазой* колебания. *Начальная фаза* колебания φ всегда положительна и меньше 2π.

Время T, в течение которого точка M сделает один полный оборот по окружности, называется *периодом* гармонического колебания. В течение этого периода проекция P точки M пройдет дважды все свои возможные положения и возвратится в первоначальное положение. Исключение составят лишь предельные положения C и D (см. рис. 242), каждое из которых точка пройдет один раз.

Посмотрим, как выражается период гармонического колебания T через амплитуду A, угловую скорость ω и начальную фазу φ.

За время T точка M пройдет путь ωT радианов. Но этот путь вместе с тем равен длине окружности, то есть 2π радианам. Поэтому $\omega T = 2\pi$, откуда

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{2}$$

Таким образом, ***период гармонического колебания обратно пропорционален угловой скорости. Он не зависит ни от амплитуды, ни от начальной фазы колебаний.***

Период гармонического колебания (1) является периодом функции $y = A \sin(\omega t + \varphi)$. Действительно,

$$A \sin[\omega(t + T) + \varphi] = A \sin\left[\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \varphi\right] =$$
$$= A \sin[\omega t + \varphi + 2\pi] = A \sin(\omega t + \varphi).$$

Это можно было бы понять, конечно, и без выполненных преобразований. Ведь в момент времени $t + T$ точка P возвращается в то же самое положение, которое она занимала в момент времени t. А значения функции $A \sin(\omega t + \varphi)$ представляют собой ординаты точки P.

Величину, обратную периоду колебания, принято называть *частотой* колебания и обозначать буквой ν*. Частота гармонического колебания (1) равна

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \tag{3}$$

Эта величина показывает, сколько колебаний совершает точка в течение одной секунды.

Угловая скорость ω выражается через частоту ν и период колебания T следующим образом (см. (3)):

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}.$$

Поэтому уравнение гармонического колебания (1) часто записывают в виде:

$$y = A \sin(2\pi\nu t + \varphi),$$

---

* ν — греческая буква; читается: ню.

или

$$y = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right).$$

Упражнения

1214. Для каждого из данных гармонических колебаний определить амплитуду A, период T, частоту ν и начальную фазу φ:

а) $y = \frac{1}{2}\sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$; в) $y = 3\cos 3t$;

б) $y = 7\sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$; г) $y = 2\sin(3\pi t + 1)$.

1215. Какие числовые значения могут принимать амплитуда, частота и начальная фаза гармонического колебания?

Построить графики данных гармонических колебаний (№ 1216, 1217):

1216. $y = 3\sin\left(2t + \frac{4\pi}{3}\right)$. **1217.** $y = \frac{1}{2}\sin\left(3t + \frac{6\pi}{5}\right)$.

1218. Какое влияние на график гармонического колебания оказывают амплитуда и частота этого колебания?

Гармоническое колебание в электротехнике § 166

Электрический ток, которым питаются городские осветительные сети, является переменным током. Его величина I постоянно изменяется, совершая гармоническое колебание

$$I = I_0\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right), \qquad (1)$$

где I_0 — максимальное значение тока, T — период колебания, φ — начальная фаза.

Выясним, в какие моменты времени ток достигает экстремальной (то есть минимальной или максимальной) величины и когда его величина обращается в нуль.

Как это следует из формулы (1), своей минимальной величины сила тока достигает при условии, что $\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) = -1$. Это уравнение дает: $\frac{2\pi}{T}t + \varphi = \frac{3}{2}\pi + 2n\pi$, откуда

$$t = T\left(n + \frac{3}{4} - \frac{\varphi}{2\pi}\right).$$

Если $\frac{3}{4} > \frac{\varphi}{2\pi}$, или $\varphi < \frac{3}{2}\pi$, то первый момент минимума можно получить из формулы (2) при $n = 0$:

$$t_1 = T\left(\frac{3}{4} - \frac{\varphi}{2\pi}\right).$$

Если же $\frac{3}{4} \leqslant \frac{\varphi}{2\pi}$, или $\varphi \geqslant \frac{3}{2}\pi$, то первый момент минимума получается из (2) при $n = 1$:

$$t_1 = T\left(\frac{7}{4} - \frac{\varphi}{2\pi}\right).$$

Каждый последующий момент минимума наступает через T секунд после предыдущего момента минимума (докажите это!).

Своей максимальной величины ток I достигает при условии, что $\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) = 1$. Это уравнение дает: $\frac{2\pi}{T}t + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, откуда

$$t = T\left(n + \frac{1}{4} - \frac{\varphi}{2\pi}\right). \tag{3}$$

Если $\frac{1}{4} > \frac{\varphi}{2\pi}$, или $\varphi < \frac{\pi}{2}$, то первый момент максимума можно получить из формулы (3) при $n = 0$:

$$t_1 = T\left(\frac{1}{4} - \frac{\varphi}{2\pi}\right).$$

Если же $\frac{1}{4} \leqslant \frac{\varphi}{2\pi}$, или $\varphi \geqslant \frac{\pi}{2}$, то первый момент максимума получается из (3) при $n = 1$:

$$t_1 = T\left(\frac{5}{4} - \frac{\varphi}{2\pi}\right).$$

Каждый последующий момент максимума наступает через T секунд после предыдущего момента максимума (докажите это!).

Теперь выясним, в какие моменты времени величина тока I обращается в нуль. Для этого нужно решить уравнение

$$\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) = 0,$$

которое дает

$$\frac{2\pi}{T}t + \varphi = n\pi,$$

откуда

$$t = \frac{T}{2}\left(n - \frac{\varphi}{\pi}\right). \tag{4}$$

Так, впервые величина тока станет нулевой в момент времени

$$t = \frac{T}{2}\left(1 - \frac{\varphi}{\pi}\right),$$

если $\varphi < \pi$, и в момент времени

$$t = \frac{T}{2}\left(2 - \frac{\varphi}{\pi}\right),$$

если $\varphi \geqslant \pi$. Каждый последующий такой момент наступает через $\frac{T}{2}$ секунд после предыдущего (докажите это!).

Упражнения

1219. Знаете ли вы, какова частота колебания тока в ваших осветительных сетях?

1220. В какие моменты времени величина y, изменяющаяся по закону

$$y = \sin\left(\frac{\pi t}{2} + \frac{2\pi}{3}\right),$$

принимает экстремальные (то есть минимальные или максимальные) значения и когда она обращается в нуль?

1221. То же, что и в задаче 1220, для законов колебаний:

а) $y = 2\sin\left(3t + \frac{\pi}{5}\right)$; б) $y = 7\sin\left(2t + \frac{5}{6}\pi\right)$.

Преобразование выражения $a\sin x + b\cos x$ путем введения вспомогательного угла — § 167

Лемма. ***Если сумма квадратов двух действительных чисел равна единице, то одно из этих чисел можно рассматривать как косинус, а другое как синус некоторого угла.***

Другими словами, если $a^2 + b^2 = 1$, то существует угол φ, такой, что $a = \cos\varphi$; $b = \sin\varphi$.

Прежде чем доказывать эту лемму, поясним ее на следующем примере:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1.$$

Поэтому существует угол φ, такой, что $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\varphi$; $\frac{1}{2} = \sin\varphi$. В качестве φ в данном случае можно выбрать любой из углов $30°$, $30° \pm 360°$, $30° \pm 2 \cdot 360°$ и т. д.

Доказательство леммы. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{OA}$ (рис. 243) с координатами (a, b). Поскольку $a^2 + b^2 = 1$, длина этого вектора равна 1. Но в таком случае его координаты должны быть равны $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$, где φ — угол, который образует данный вектор с осью абсцисс. Итак, $a = \cos\varphi$; $b = \sin\varphi$, что и требовалось доказать.

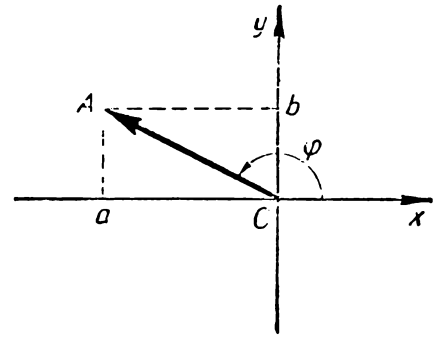

Рис. 243

Доказанная лемма позволяет преобразовать выражение $a\sin x + b\cos x$ к более удобному для изучения виду.

Прежде всего вынесем за скобки выражение $\sqrt{a^2+b^2}$:

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right).$$

Поскольку $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$, первое из чисел $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ можно рассматривать как косинус некоторого угла φ, а второе как синус того же угла φ:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi,\quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi.$$

Но в таком случае

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\varphi\sin x+\sin\varphi\cos x)=$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\,\sin(x+\varphi).$$

Итак $$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi),$$

где угол φ определяется из условий

$$\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}};\quad \cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Примеры.

1) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)=$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin x+\sin\frac{\pi}{4}\cos x\right)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

Полученную формулу

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

полезно запомнить.

2) Если одно из чисел a и b положительно, а другое отрицательно, то выражение $a\sin x+b\cos x$ удобнее преобразовывать не к синусу суммы, а к синусу разности двух углов. Так,

$$3\sin x-4\cos x=\sqrt{9+16}\left(\frac{3}{\sqrt{9+16}}\sin x-\frac{4}{\sqrt{9+16}}\cos x\right)=$$
$$=5\left(\sin x\cdot\frac{3}{5}-\cos x\cdot\frac{4}{5}\right)=5\sin(x-\varphi),$$

где под φ можно подразумевать любой угол, удовлетворяющий условиям:

$$\cos\varphi=\frac{3}{5},\quad \sin\varphi=\frac{4}{5}.$$

В частности, можно положить $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$. Тогда получим:

$$3\sin x-4\cos x=5\sin\left(x-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right).$$

Упражнения

Преобразовать данные выражения (№ 1222 — 1229) путем введения вспомогательного угла:

1222. $\sin x+\sqrt{3}\cos x$. **1223.** $\sin x-\cos x$.

1224. $3\sin x + 4\cos x$.

1225. $4\sin x - 3\cos x$.

1226. $5\sin x - 12\cos x$.

1227. $-7\sin 2x - 24\cos 2x$.

1228. $3\sin 3x + 2\sqrt{2}\cos 3x$.

1229. $\sin 5x + \cos 5x$.

1230. Какое наибольшее и какое наименьшее значение может принимать каждое из данных выражений:

а) $3\sin x + 4\cos x$;

б) $|3\sin x - 4\cos x|$;

в) $-5\sin x + 12\cos x$;

г) $5 - 7\sin x - 24\cos x$;

д) $\sqrt{\sin x - \cos x}$;

е) $\dfrac{1}{|\sin x + \cos x|}$?

1231. Доказать, что уравнение

$$\sqrt{99}\sin x - 49\cos x = 51$$

не имеет корней.

Построить графики данных функций (№ 1232, 1233):

1232. $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x$.

1233. $y = \sin 2x - \cos 2x$.

Сложение гармонических колебаний одинаковой частоты § 168

На практике (например, в электротехнике) часто приходится иметь дело с колебаниями одинаковой частоты. Любые два таких колебания можно представить в виде:

$$y_1 = A_1\sin(\omega t + \varphi_1);\quad y_2 = A_2\sin(\omega t + \varphi_2).$$

Особый интерес представляет случай, когда начальная фаза первого колебания равна 0, а начальная фаза второго колебания равна $\frac{\pi}{2}$. Тогда $y_1 = A_1\sin\omega t$; $y_2 = A_2\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = A_2\cos\omega t$.

Сумма таких гармонических колебаний равна:

$$A_1\sin\omega t + A_2\cos\omega t = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}\cdot\sin(\omega t + \varphi), \qquad (1)$$

где угол φ определяется из условий

$$\sin\varphi = \frac{A_2}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}};\quad \cos\varphi = \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}}. \qquad (2)$$

Формула (1) показывает, что ***если два гармонических колебания имеют одинаковую частоту и фазы 0 и $\frac{\pi}{2}$, то их сумма есть гармоническое колебание той же частоты.***

Амплитуда A суммарного колебания выражается через амплитуды A_1 и A_2 слагаемых колебаний по формуле

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2},$$

а начальная фаза φ определяется из условий (2).

Пример. Найти амплитуду, частоту и начальную фазу колебания $y = \sin 5t - \sqrt{3}\cos 5t$.

Имеем: $\sin 5t - \sqrt{3}\cos 5t = \sqrt{1+3}\ \sin(5t+\varphi) = 2\sin(5t+\varphi)$, причем $\sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\varphi = \frac{1}{2}$. Поэтому $\varphi = \frac{5\pi}{3}$ и, следовательно,

$$\sin 5t - \sqrt{3}\cos 5t = 2\sin\left(5t + \frac{5\pi}{3}\right).$$

Амплитуда данного колебания равна 2, частота $\frac{5}{2\pi}$, а начальная фаза $\frac{5\pi}{3}$.

Упражнения

Для каждого из данных гармонических колебаний (№ 1234 — 1237) найти амплитуду, частоту и начальную фазу. Построить графики этих колебаний.

1234. $y = \sin 2t - \cos 2t$. **1236.** $y = 4\sin \pi t + 3\cos \pi t$.

1235. $y = \sqrt{3}\sin 3t + \cos 3t$. **1237.** $y = 7\sin t - 24\cos t$.

1238. Докажите, что сумма двух произвольных гармонических колебаний одинаковой частоты есть гармоническое колебание той же частоты. Как определяются амплитуда, частота и начальная фаза суммарного колебания через соответствующие характеристики слагаемых колебаний?

1239. В мастерской установлены два двигателя. При включении одного из них каждая точка пола приходит в гармоническое колебание с амплитудой 0,1 *мм* и частотой 1400 1/*мин*. При включении другого каждая точка пола начинает совершать гармонические колебания с той же амплитудой и частотой 1450 1/*мин*. Как будет колебаться пол при включении обоих электродвигателей?

Доказательство тригонометрических тождеств § 169

Существует много различных способов доказательства тригонометрических тождеств. На конкретных примерах мы рассмотрим некоторые из этих способов.

Пример 1. Доказать тождество

$$\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right). \qquad (1)$$

1-й способ. Выражение, стоящее в левой части этого тождества, преобразуем так, чтобы оно привелось к виду $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$. Для этого запишем $\cos\alpha$ как $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$. Тогда, используя формулы для суммы и разности синусов двух углов, получим:

$$\cos\alpha + \sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sin\alpha = 2\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\frac{\pi}{4} =$$
$$= \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right);$$

$$\cos\alpha - \sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \sin\alpha = 2\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) =$$
$$= \sqrt{2}\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right).$$

Поэтому

$$\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \frac{\sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)} = \operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right).$$

2-й способ. Выражение $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$, стоящее в правой части данного тождества, преобразуем к виду $\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$. Для этого воспользуемся формулой для тангенса суммы двух углов:

$$\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + 1}{1 - \operatorname{tg}\alpha} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + 1}{1 - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha}} =$$
$$= \frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}.$$

Однако здесь необходимо сделать одно принципиально важное замечание. Когда мы писали, что $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}$, то фактически мы предполагали, что выражение $\operatorname{tg}\alpha$ определено, то есть $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$. На самом же деле это предположение может оказаться неверным. Поэтому случай, когда $\alpha = \frac{\pi}{2} + n\pi$, нужно рассмотреть отдельно. В этом случае $\cos\alpha = 0$, и поэтому левая часть данного тождества принимает вид:

$$\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{-\sin\alpha} = -1.$$

Правая же часть данного тождества при $\alpha = \frac{\pi}{2} + n\pi$ обращается в $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{3}{4}\pi + n\pi\right)$. Но π есть период тангенса; следовательно,

$$\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\frac{3}{4}\pi = -1.$$

Таким образом, и при $\alpha = \frac{\pi}{2} + n\pi$ равенство (1) справедливо.

Теперь можно считать, что данное тождество полностью доказано.

3-й способ. Выражения, стоящие в левой и правой частях данного тождества, преобразуем к одному и тому же виду. Для этого числитель и знаменатель дроби $\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$ разделим на $\cos\alpha$, предполагая сначала, что $\cos\alpha\neq 0$. В результате получим:

$$\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}. \qquad (2)$$

Правую часть данного тождества преобразуем, используя формулу для тангенса суммы двух углов:

$$\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+1}{1-\operatorname{tg}\alpha}. \qquad (3)$$

Сравнивая (2) и (3), получаем:

$$\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right).$$

Случай, когда $\cos\alpha=0$, нужно рассмотреть отдельно, так же как мы это сделали при рассмотрении способа 2.

Пример 2. Доказать тождество

$$\cos 3\alpha\cdot\sin 5\alpha-\sin 2\alpha=\sin 3\alpha\cdot\cos 5\alpha.$$

Покажем, что разность между выражениями, стоящими в левой и правой частях данного тождества, равна 0. Действительно, $\cos 3\alpha\cdot\sin 5\alpha-\sin 2\alpha-\sin 3\alpha\cdot\cos 5\alpha=$

$=(\cos 3\alpha\cdot\sin 5\alpha-\sin 3\alpha\cdot\cos 5\alpha)-\sin 2\alpha=$

$=\sin(5\alpha-3\alpha)-\sin 2\alpha=\sin 2\alpha-\sin 2\alpha=0.$

Тем самым тождество доказано.

Упражнения

Доказать данные тождества:

1240. $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}=\cos\alpha\cdot\cos\beta.$

1241. $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\sin 2\alpha.$

1242. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}.$

1243. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{2\sin\alpha\cdot\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)}{(\sin\alpha+\cos\alpha)\cos\beta-(\sin\beta+\cos\beta)\sin\alpha}.$

1244. $\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right).$

1245. $\dfrac{\sin(30^\circ+\alpha)-\cos(60^\circ+\alpha)}{\sin(30^\circ+\alpha)+\cos(60^\circ+\alpha)}=\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha.$

1246. $\cos 4\alpha\cdot\cos 6\alpha-\cos 10\alpha=\sin 4\alpha\sin 6\alpha.$

1247. $-\dfrac{1}{4}\operatorname{tg}2\alpha\sin 2\alpha=\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha}.$

Равенства, содержащие выражения arcsin a, arccos a и т. д. § 170

Пусть нужно доказать равенство

$$\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}3=\frac{3}{4}\pi.$$

Прежде всего выясним, в каких пределах заключен угол $\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}3$. Каждый из углов $\operatorname{arctg}2$ и $\operatorname{arctg}3$ больше 0 и меньше $\frac{\pi}{2}$. Поэтому

$$0<\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}3<\pi.$$

Аналогичному неравенству удовлетворяет и угол $\frac{3}{4}\pi$:

$$0<\frac{3}{4}\pi<\pi.$$

Таким образом, углы $\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}3$ и $\frac{3}{4}\pi$ находятся в интервале от 0 до π. Но в таком случае для доказательства их равенства достаточно показать, что равны их тангенсы. Имеем:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}3)=\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}2)+\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}3)}{1-\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}2)\cdot\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}3)}=\frac{2+3}{1-2\cdot3}=-1;$$

$$\operatorname{tg}\frac{3}{4}\pi=-1.$$

Тем самым данное равенство доказано.

Заметим, что нахождение тех пределов, в которых заключена сумма $\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}3$, является обязательным. Нельзя делать вывод, что $\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}3=\frac{3}{4}\pi$, на основании только того, что $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}3)=\operatorname{tg}\frac{3}{4}\pi$. Из равенства тангенсов двух углов еще не следует, что равны сами эти углы. Однако если углы заключены в пределах от 0 до π, то равенство их тангенсов обеспечивает равенство и самих углов.

Упражнения

Доказать данные равенства:

1248. $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}=\frac{\pi}{4}.$

1249. $\operatorname{arctg} 5 + \operatorname{arctg} \dfrac{1-5\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{6}$.

1250. $\arcsin 0{,}6 + \arcsin 0{,}8 = \dfrac{\pi}{2}$.

1251. $\arccos \dfrac{5}{13} - \arccos \dfrac{12}{13} = \arccos \dfrac{120}{169}$.

1252. $\arcsin 0{,}8 + \arccos \dfrac{4}{5} = \dfrac{\pi}{2}$.

1253. $\arcsin 0{,}8 - \arccos 0{,}6 = 0$.

Тригонометрические уравнения § 171

В этой главе был получен ряд важных тригонометрических тождеств. Сейчас на конкретных примерах мы покажем, как эти тождества можно использовать для решения тригонометрических уравнений.

Пример 1. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = -2.$$

Используя формулу для тангенса суммы двух углов, получаем:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} x} = \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}.$$

Поэтому данное уравнение можно переписать в виде:

$$\operatorname{tg} x + \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = -2.$$

Обозначив $\operatorname{tg} x$ через y, мы приходим к алгебраическому уравнению

$$y + \frac{1+y}{1-y} = -2,$$

или

$$y(1-y) + 1 + y = -2(1-y),$$

откуда

$$y = \pm\sqrt{3}.$$

Итак, либо $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ и тогда $x = \dfrac{\pi}{3} + n\pi$, либо $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ и тогда $x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi$, где n и k — любые целые числа. Обе эти группы решений можно представить одной формулой

$x = \pm\dfrac{\pi}{3} + n\pi$.

Ответ. $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + n\pi$.

Пример 2. Решить уравнение

$$3\cos 2x = 7\sin x.$$

Представим $\cos 2x$ как $\cos^2 x - \sin^2 x$. Тогда данное уравнение можно записать в виде:

$$3(\cos^2 x - \sin^2 x) = 7\sin x.$$

Заменяя $\cos^2 x$ на $1 - \sin^2 x$, получаем:

$$3(1 - 2\sin^2 x) = 7\sin x.$$

Обозначая $\sin x$ через y, приходим к следующему квадратному уравнению: $-6y^2 - 7y + 3 = 0$, откуда $y_1 = \frac{1}{3}$; $y_2 = -\frac{3}{2}$. Вспоминая, что $y = \sin x$, получаем: либо $\sin x = \frac{1}{3}$, либо $\sin x = -\frac{3}{2}$. Но второе невозможно: синус любого угла по абсолютной величине не превышает единицы. Поэтому $\sin x = \frac{1}{3}$, откуда $x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + n\pi$, где n — любое целое число.

Пример 3. Решить уравнение

$$2\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{3}{2}\sin 2x.$$

Представив $\sin 2x$ в виде $2\sin x\cos x$, придем к однородному уравнению $2\sin^2 x + \cos^2 x = 3\sin x\cos x$. Разделив обе части этого уравнения на $\cos^2 x$, получим:

$$2\operatorname{tg}^2 x + 1 = 3\operatorname{tg} x.$$

Отсюда

$$(\operatorname{tg} x)_1 = 1, \text{ или } x = \frac{\pi}{4} + n\pi;$$

$$(\operatorname{tg} x)_2 = \frac{1}{2}, \text{ или } x = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + k\pi.$$

Ответ. $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$, $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + k\pi$, где n и k — любые целые числа.

Пример 4. Решить уравнение

$$1 + \cos x + \sin x = 0.$$

Представим $1 + \cos x$ как $2\cos^2\frac{x}{2}$, а $\sin x$ как $2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$. Тогда данное уравнение можно записать в виде:

$$2\cos^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0.$$

Поэтому

$$2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right) = 0.$$

Если $\cos\frac{x}{2}=0$, то $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+n\pi$ и, следовательно, $x=\pi+2n\pi$.

Если $\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}=0$ (однородное уравнение), то $1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}=0$, откуда $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=-1$; $\frac{x}{2}=-\frac{\pi}{4}+k\pi$. Следовательно, $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

Ответ. $x=\pi+2n\pi$; $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, где n и k — любые целые числа.

Пример 5. Решить уравнение

$$\cos 2x=\cos 6x.$$

Перепишем данное уравнение в виде $\cos 2x-\cos 6x=0$ и используем формулу для разности косинусов двух углов. В результате получим:

$$-2\sin\frac{2x+6x}{2}\cdot\sin\frac{2x-6x}{2}=0,$$

или

$$2\sin 4x\sin 2x=0.$$

В таком случае либо $\sin 2x=0$ и тогда $2x=m\pi$, $x=\frac{\pi}{2}m$, либо $\sin 4x=0$ и тогда $4x=k\pi$, $x=\frac{\pi}{4}k$. Обе группы корней можно представить одной формулой $x=\frac{\pi}{4}k$.

Ответ. $x=\frac{\pi}{4}k$.

Пример 6. Решить уравнение

$$\cos 4x\cos 2x=\cos 5x\cos x.$$

Представим произведения $\cos 4x\cdot\cos 2x$ и $\cos 5x\cdot\cos x$ в виде (см. § 157):

$$\cos 4x\cos 2x=\frac{1}{2}(\cos 6x+\cos 2x);$$

$$\cos 5x\cos x=\frac{1}{2}(\cos 6x+\cos 4x).$$

Тогда данное уравнение можно переписать в виде:

$$\frac{1}{2}(\cos 6x+\cos 2x)=\frac{1}{2}(\cos 6x+\cos 4x).$$

Отсюда $\cos 2x=\cos 4x$; $-2\sin 3x\cdot\sin(-x)=0$;

$\cos 2x-\cos 4x=0$; $2\sin 3x\cdot\sin x=0$.

Поэтому либо $\sin x=0$ и тогда $x=n\pi$, либо $\sin 3x=0$ и тогда $3x=k\pi$, $x=\frac{k\pi}{3}$. Очевидно, что обе группы корней можно записать одной формулой $x=\frac{\pi}{3}m$.

Ответ. $x=\frac{\pi}{3}m$.

Пример 7. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x = 0.$$

Используя формулу для разности тангенсов двух углов, получаем:

$$\frac{\sin 2x}{\cos 3x \cdot \cos x} = 0,$$

откуда $\sin 2x = 0$, $2x = m\pi$; $x = \frac{\pi}{2} m$. Из этих значений x нужно отбросить как посторонние те, при которых хотя бы одно из выражений $\cos 3x$ и $\cos x$ обращается в нуль. Выражение $\cos x$ обращается в нуль при $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Поэтому из полученных ранее значений $x = \frac{\pi}{2} m$ остаются лишь значения $x = m\pi$. Выражение $\cos 3x$ обращается в нуль при условии, что $3x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, или $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} k = \frac{\pi}{6}(2k + 1)$. Число $(2k + 1)$ нечетное, а число 6 четное. Поэтому число $\frac{2k+1}{6}$ не может быть целым и, следовательно, значения $x = \frac{2k+1}{6}\pi$ не содержатся среди значений $x = m\pi$. Таким образом, все числа вида $x = m\pi$ являются корнями данного уравнения.

Ответ. $x = m\pi$.

Пример 8. Решить уравнение

$$\sin^2 2x + \sin^2 x = 1.$$

Из тождества $1 - \cos\alpha = 2\sin^2 \frac{\alpha}{2}$ вытекает, что

$$\sin^2 2x = \frac{1 - \cos 4x}{2}; \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

Поэтому данное уравнение можно переписать в виде:

$$\frac{1 - \cos 4x}{2} + \frac{1 - \cos 2x}{2} = 1,$$

откуда

$$\cos 4x + \cos 2x = 0.$$

Это уравнение легко решается с помощью формулы для суммы косинусов двух углов, из которой получаем:

$$2\cos 3x \cdot \cos x = 0.$$

Если $\cos x = 0$, то $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$; если же $\cos 3x = 0$, то $3x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, откуда $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} k$. Нетрудно понять, что вторая группа корней $\left(x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} k\right)$ при $k = 3n + 1$ содержит в себе все

корни первой группы $\left(x = \frac{\pi}{2} + n\pi\right)$. Поэтому ответ к данной задаче можно выразить одной формулой: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k$.

Пример 9. Решить уравнение

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1.$$

Преобразуем выражение $\sin x - \sqrt{3}\cos x$, введя вспомогательный угол (см. § 167): $\sin x - \sqrt{3}\cos x =$

$$= \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}\left[\frac{1}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}}\cos x\right] =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}\sin x - \sin\frac{\pi}{3}\cos x\right) =$$

$$= 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

Теперь данное уравнение можно записать в виде:

$$2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1,$$

откуда $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ и, следовательно,

$$x - \frac{\pi}{3} = (-1)^n\frac{\pi}{6} + n\pi, \quad x = \frac{\pi}{3} + (-1)^n\frac{\pi}{6} + n\pi.$$

Ответ. $x = \frac{\pi}{3} + (-1)^n\frac{\pi}{6} + n\pi$.

Пример 10. Решить уравнение

$$5\sin x - \cos x = 5.$$

Это уравнение в принципе можно решать тем же способом, что и предыдущее уравнение:

$$\sqrt{26}\left(\frac{5}{\sqrt{26}}\sin x - \frac{1}{\sqrt{26}}\cos x\right) = 5,$$

$$\sqrt{26}\sin(x - \varphi) = 5,$$

где $$\cos\varphi = \frac{5}{\sqrt{26}}, \quad \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{26}},$$

или $$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{5}.$$

Поэтому $$\sin\left(x - \operatorname{arctg}\frac{1}{5}\right) = \frac{5}{\sqrt{26}},$$

откуда $$x - \operatorname{arctg}\frac{1}{5} = (-1)^n\arcsin\frac{5}{\sqrt{26}} + n\pi;$$

$$x = \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + (-1)^n\arcsin\frac{5}{\sqrt{26}} + n\pi.$$

Но в данном случае лучше использовать другой метод решения, который приводит к более простому ответу. Введем в рассмотрение новую переменную $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2y}{1+y^2}, \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-y^2}{1+y^2}.$$

Тогда данное уравнение можно переписать в виде:

$$\frac{10y}{1+y^2} - \frac{1-y^2}{1+y^2} = 5,$$

откуда

$$10y - 1 + y^2 = 5(1+y^2);$$
$$4y^2 - 10y + 6 = 0;$$
$$y_1 = 1, \; y_2 = \frac{3}{2}.$$

Вспоминая, что $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, получаем:

$$\left(\frac{x}{2}\right)_1 = \frac{\pi}{4} + n\pi; \quad \left(\frac{x}{2}\right)_2 = \operatorname{arctg}\frac{3}{2} + 2k\pi.$$

Следовательно, данное уравнение имеет две группы корней:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \text{ и } x = 2\operatorname{arctg}\frac{3}{2} + 2k\pi,$$

где n и k — любые целые числа.

Желающие могут проверить, что ответы, полученные двумя различными способами, выражают один и тот же результат.

Вводить новую переменную $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ можно лишь в том случае, если заранее известно, что $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, или $x \neq \pi + 2n\pi$. Таким образом, описанный способ решения уравнения $a\sin x + b\cos x = c$ может привести к потере некоторых корней, а именно корней вида $x = \pi + 2n\pi$. Такие корни требуют специальной проверки.

Упражнения

Решить уравнения:

1254. $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1.$

1255. $\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \frac{1}{2}\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

1256. $\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - 0{,}5\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x.$

1257. $\cos 2x \cdot \cos x = \sin 2x \cdot \sin x.$

1258. $\sin\alpha \cdot \cos(\alpha + x) = \cos\alpha \sin(\alpha + x).$

1259. $\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=0.$

1260. $\operatorname{tg}3x\cdot\operatorname{tg}x=1.$

1261. $\sin 2x=2\sin x.$

1262. $\cos 2x=2\sin^2 x.$

1263. $\sin x\cdot\cos x=0{,}25.$

1264. $\sin x+\cos\frac{x}{2}=0.$

1265. $\sin^4 x+\cos^4 x=\sin 2x.$

1266. $\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}=0{,}5.$

1267. $\sin^4\frac{x}{2}-\cos^4\frac{x}{2}=0{,}25.$

1268. $5\cos 2x=\sqrt{56}\sin x.$

1269. $\cos 2x=2\sin x-\frac{1}{2}.$

1270. $\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{tg}x.$

1271. $\operatorname{tg}2x=3\operatorname{tg}x.$

1272. $\frac{\operatorname{tg}2x}{\operatorname{tg}x}+\frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}2x}=2.$

1273. $2\sin^2 x=\sqrt{6}\sin 2x-3\cos^2 x.$

1274. $\cos^2 x+4\sin^2 x=2\sin 2x.$

1275. $\sin 2x+\sin x\cdot\cos x=2\cos 2x.$

1276. $\cos 7x\cdot\cos 3x=\cos 4x.$

1277. $\cos 3x\cdot\cos x=\cos 7x\cdot\cos 5x.$

1278. $\cos 2x\cdot\cos 3x=\cos 5x\cdot\cos 6x.$

1279. $\sin x\cdot\sin 3x=\sin 2x\cdot\sin 4x.$

1280. $\sin 2x\cdot\cos 3x=\sin 3x\cdot\cos 2x.$

1281. $\cos(\alpha+x)\cdot\cos(\alpha-x)+\sin^2 x=0{,}5.$

1282. $\cos\frac{x}{2}=1+\cos x.$

1283. $1-\cos x=\sin x.$

1284. $1+\cos x+\cos 2x=0.$

1285. $\cos 2x=1+\sin x.$

1286. $4(1+\cos x)=3\sin^2\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}.$

1287. $\sin x+\sin 3x=0.$

1288. $\sin x-\sin 3x=0.$

1289. $\sin(30^\circ+x)-\sin(60^\circ-x)=1.$

1290. $\cos 2x+\cos 6x=0.$

1291. $\cos 2x-\cos 6x=0.$

1292. $\cos(x-\alpha)-\cos(x-\beta)=\sin(\beta-\alpha).$

1293. $\sin 3x=\cos 2x.$

1294. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0.$

1295. $\cos x-\cos 2x=\sin 3x.$

1296. $\sin x+\sin 3x+\sin 5x=0.$

1297. $\operatorname{tg}5x+\operatorname{tg}3x=0.$

1298. $\operatorname{tg}5x=\operatorname{tg}3x.$

1299. $\operatorname{tg}4x=\operatorname{tg}2x.$

1300. $\operatorname{tg}(\alpha+x)+\operatorname{tg}(\alpha-x)=0.$

1301. $\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}\frac{3x}{2}.$

1302*. $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}3x+\operatorname{tg}5x=0.$

1303. $\cos^2 x+3\cos^2\frac{x}{2}=2.$

1304. $\sin^2 x + \sin^2 3x + \frac{1}{2}\cos 6x = 1.$

1305. $\cos^2 x + 2\sin^2 5x = \frac{3 - \cos 10x}{2}.$

1306. $\sin^2 4x + 7\cos^2 6x + \frac{1}{2}\cos 8x = 5.$

1307. $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1.$

1308. $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{2}.$

1309. $\sin 5x + \sqrt{3}\cos 5x = 2\sin 7x.$

1310. $\sin x - \sqrt{7}\cos x = \sqrt{7}.$

1311. $\frac{\sin x + \cos x}{\cos 2x} = \sqrt{2}.$

1312. $\sin x - \cos x + \operatorname{tg} x = 1.$

1313. $2\sin x - 5\cos x + 2\operatorname{tg} x = 5.$

1314. $\sqrt{3}\sin x - \sqrt{5}\cos x = \sqrt{3}.$

1315. $\sin 2x \cdot \operatorname{tg} x = 1.$

1316. $\cos 4x + \operatorname{tg} 2x = 1.$

1317. $\cos x \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = -\frac{3}{2}.$

Графический способ решения тригонометрических уравнений § 172

О графическом способе решения некоторых тригонометрических уравнений мы уже говорили в § 125, ч. I. Теперь, умея строить графики тригонометрических функций кратных углов, мы можем решать этим способом гораздо больше уравнений, чем прежде. Но основная идея решения, конечно, остается той же самой.

Для примера рассмотрим уравнение

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 2 - x.$$

Графики функций $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ и $y = 2 - x$ (рис. 244) пересекаются в бесконечном числе точек. Значит, данное уравнение имеет бесконечное множество корней. Найдем, например, наименьший положительный корень x_0. Этот корень является абсциссой точки пересечения графиков. Примерно он равен 1,2.

Чтобы найти этот корень точнее, воспользуемся таблицами тангенсов (см. таблицы В. М. Брадиса, стр. 62). Выпишем значения функций $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ и $y = 2 - x$ в окрестности точки $x = 1.2$.

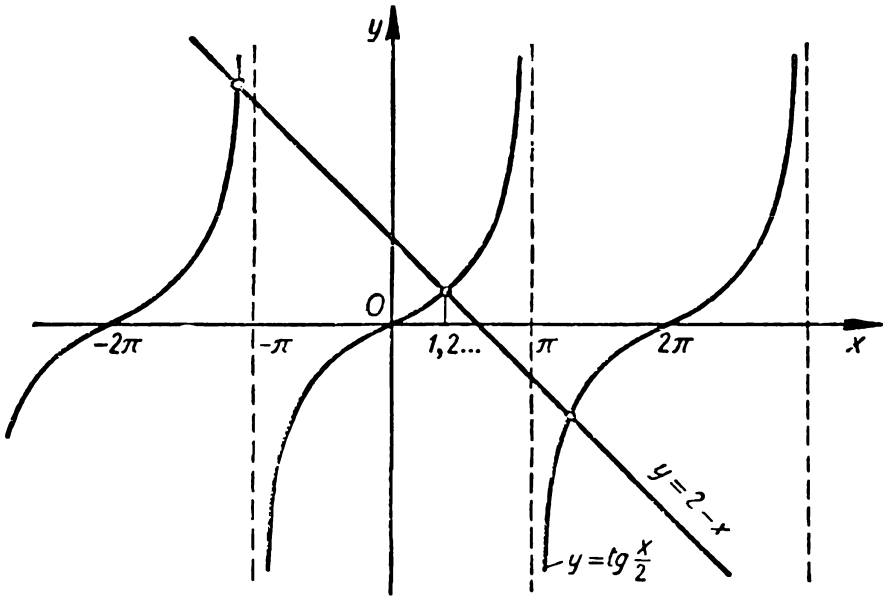

Рис. 244

x	1,2	1,3
$y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$	0,6841	0,7602
$y = 2 - x$	0,8000	0,7000
$\operatorname{tg}\frac{x}{2} - (2 - x)$	—0,1159	0,0602

Как видно из этой таблицы, при переходе от значения $x = 1{,}2$ к значению $x = 1{,}3$ разность $\operatorname{tg}\frac{x}{2} - (2 - x)$ меняет свой знак на противоположный (с — на +). Значит, в нуль эта разность обращается где-то между значениями 1,2 и 1,3. Следовательно, с точностью до 0,1 $x_0 \approx 1{,}2$ (с недостатком) и $x_0 \approx 1{,}3$ (с избытком).

Используя таблицу тангенсов, можно найти и приближенное значение этого корня с точностью до 0,01. Для этого рассмотрим значение $x = 1{,}25$, являющееся средним значением чисел 1,2 и 1,3. При $x = 1{,}25$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} \approx 0{,}7215,$$

$$2 - x = 0{,}7500.$$

Поскольку $\operatorname{tg}\frac{x}{2} < 2 - x$, то $x_0 > 1{,}25$ (см. рис. 244). Итак,

$$1{,}25 < x_0 < 1{,}30.$$

Теперь испытаем значение $x = 1{,}28$, которое близко к среднему значению чисел 1,25 и 1,30. При $x = 1{,}28$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} \approx 0{,}7445,$$
$$2 - x = 0{,}7200.$$

Теперь уже $\operatorname{tg}\frac{x}{2} > 2 - x$. Значит (см. рис. 244), $x_0 < 1{,}28$.

Аналогично, рассматривая значение $x = 1{,}26$, мы получили бы $\operatorname{tg}\frac{x}{2} < 2 - x$ и потому $x_0 > 1{,}26$. Значит,

$$1{,}26 < x_0 < 1{,}28.$$

Поэтому с точностью до 0,01

$$x_0 \approx 1{,}27.$$

Если бы нужно было определить, какое это приближенное значение (с недостатком или с избытком), то нам пришлось бы сравнить значения $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ и $2 - x$ в точке $x = 1{,}27$.

Предлагаем учащимся сделать это самостоятельно.

Упражнения

1318. Найти наименьший положительный корень уравнения

$$\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 2 - x^2$$

с точностью до 0,01.

1319. Найти корень уравнения

$$\sin 2x = 1 - 4x$$

с точностью до 0,01.

Задачи на повторение

1320. Сколько действительных корней имеет каждое из данных уравнений:

а) $\sin x = 2x$;

б) $\sin x = \frac{x+1}{2}$;

в) $\operatorname{tg} ax = bx + c \quad (b \neq 0)$;

г) $\cos 2x = x$?

1321. Может ли тангенс суммы двух углов быть равен сумме тангенсов этих углов? Если может, то в каком случае?

1322. Вычислить $\sin(\alpha + \beta)$ и $\cos(\alpha - \beta)$, если известно, что $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, причем углы α и β оканчиваются в одной и той же четверти.

1323. Вычислить $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}$ (известно, что $a > b > 0$ и угол α оканчивается не в 1-й четверти).

1324. Найти $\sin 4x$, если известно, что $\operatorname{tg} x = 3$.

Доказать тождества (№ 1325 — 1327):

1325. $\sin 200° \cdot \sin 310° + \cos 340° \cdot \cos 50° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1326. $16 \sin 10° \cdot \sin 30° \cdot \sin 50° \cdot \sin 70° = 1$.

1327. $\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{3}{5}\pi = \frac{1}{2}$.

Упростить выражения (№ 1328, 1329).

1328. $\frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha}$.

1329. $\sqrt{1+\sin\varphi} - \sqrt{1-\sin\varphi}$ при а) $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$;

б) $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$.

1330. Разложить на множители:

$$\cos^2 4\alpha + \cos^2 3\alpha - \sin^2 2\alpha - \sin^2\alpha.$$

Доказать тождества (№ 1331 — 1334):

1331. $\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha} = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$.

1332. $\frac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1} = 2\cos\alpha$.

1333. $\frac{1-\sin^6\alpha-\cos^6\alpha}{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha} = \frac{3}{2}$.

1334. $\operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\operatorname{tg}\alpha$.

1335. Электрогенератор вырабатывает трехфазный ток:

$$I_1 = I_0\sin(\omega t + \varphi),\ I_2 = I_0\sin\left(\omega t + \varphi + \frac{2}{3}\pi\right),$$

$$I_3 = I_0\sin\left(\omega t + \varphi + \frac{4}{3}\pi\right).$$

Доказать, что в любой момент времени t

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0.$$

1336. Как связаны между собой углы α и β, если

$$|\sin\alpha| = |\sin\beta|?$$

1337. Упростить выражение:

$$\sqrt{\sin^2\alpha + \cos 2\alpha} + 1$$

и проверить справедливость полученного результата при $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi$.

Решить уравнения (№ 1338 — 1351):

1338. $2 \sin x \sin 2x + \cos 3x = 0.$

1339. $|\cos^2 x - \sin^2 x| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

1340. $\sin x + \cos x = \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}.$

1341. $5 (\sin x + \cos x)^2 - 13 (\sin x + \cos x) + 8 = 0.$

1342. $\cos 3x - \sin x = \cos x - \sin 3x.$

1343. $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 4x = 0.$

1344. $\frac{1}{2} (\sin^4 x + \cos^4 x) + \sin x \cos x + \sin^2 x \cos^2 x = 0.$

1345. $\sin 2x + \cos 2x + \sin x \cos x + 1 = 0.$

1346. $\sin (\cos x) = \cos (\sin x).$

1347. $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2.$

1348. $\cos 2x + \operatorname{tg} x = 1.$

1349. $\cos^3 x \sin 3x + \sin^3 x \cos 3x = \frac{3}{4}.$

1350. $\sin x \sin 3x = 0{,}5.$

1351. $\sin x + \cos x + 2 \sin x \cos x = -1.$

Решить системы уравнений:

1352. $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1, \\ x + y = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$

1353. $\begin{cases} \sin x + \sin y = \sqrt{2}, \\ x + y = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

1354. $\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{\sqrt{3} - 1}{4}, \\ \cos x \cos y = \frac{\sqrt{3} + 1}{4}. \end{cases}$

1355. $\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{3}{4}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 3. \end{cases}$

1356. $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \\ = \sqrt{3} (\sqrt{3} - 2), \\ x + y = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$

1357. $\begin{cases} \frac{\sin x}{\sin y} = \sqrt{3}, \\ \frac{\cos x}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{cases}$

Из истории тригонометрии § 173

Слово «тригонометрия» греческого происхождения. В переводе на русский язык оно означает «измерение треугольников». Как и все другие разделы математики, зародившиеся в глубокой древности, тригонометрия возникла в результате попыток решить те задачи, с которыми человеку приходилось сталкиваться на практике. Среди таких задач следует прежде всего назвать задачи землемерия и астрономии.

В том, что тригонометрия относится к древним наукам, нас убеждает хотя бы такой факт. Для предсказания момента наступления солнечного или лунного затмения необходимо произвести расчеты, требующие привлечения тригонометрии. Весьма точно предсказывали затмения еще древне-вавилонские уче-

ные. По-видимому, они уже владели элементарными тригонометрическими понятиями.

Первые достоверно засвидетельствованные тригонометрические таблицы были составлены во втором веке до н. э. Их автором был греческий астроном Гиппарх. Таблицы эти до нас не дошли, но в усовершенствованном виде они были включены в «Альмагест» («Великое построение») александрийского астронома Птолемея. Таблицы Птолемея подобны таблицам синусов углов от 0° до 90°, составленным через каждые четверть градуса. В «Альмагесте», в частности, есть формулы для синуса и косинуса суммы двух углов, содержатся также элементы сферической тригонометрии*.

В средние века наибольшие успехи в развитии тригонометрии были достигнуты учеными Средней Азии и Закавказья. В это время к тригонометрии начинают относиться как к самостоятельной науке, не связывая ее, как прежде, с астрономией. Большое внимание уделяется задаче решения треугольников. Одним из самых примечательных сочинений по тригонометрии этого периода является «Трактат о четырехугольнике» Насир Эддина (XIII век). В этом трактате введен ряд новых тригонометрических понятий, по-новому доказаны некоторые уже известные результаты. Основные работы по тригонометрии в Европе были выполнены почти на два столетия позднее. Здесь следует прежде всего отметить немецкого ученого Регионтана (XV век) Его главное произведение «Пять книг о различного рода треугольниках» содержит достаточно полное изложение основ тригонометрии. От наших нынешних учебников по тригонометрии это сочинение отличается в основном лишь отсутствием удобных современных обозначений. Все теоремы сформулированы словесно. После появления «Пяти книг» Регионтана тригонометрия окончательно выделилась в самостоятельную науку, не зависящую от астрономии. Регионтаном составлены также довольно подробные тригонометрические таблицы.

Развитие алгебраической символики и введение в математику отрицательных чисел позволило рассматривать отрицательные углы; появилась возможность рассматривать тригонометрические функции числового аргумента. Развитие математики позволило вычислять значения тригонометрических функций любого числа с любой наперед заданной точностью.

Существенный вклад в развитие тригонометрии внес Эйлер. Им дано современное определение тригонометрических функций и указано на тесную связь этих функций с показательными функциями (см. гл. VIII).

В настоящее время тригонометрические функции лежат в основе специального математического аппарата, так называемого *гармонического анализа*, при помощи которого изучаются различного рода периодические процессы: колебательные движения, распространение волн, некоторые атмосферные явления и пр.

---

* Сферическая тригонометрия рассматривает углы и другие фигуры не на плоскости, а на сфере.

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

VIII

Степень положительного числа с положительным рациональным показателем

§ 174

В главе IV (часть I) было дано определение степени положительного числа a с рациональным показателем r. Напомним это определение.

Если число r — натуральное, то a^r есть произведение r чисел, каждое из которых равно a:

$$a^r = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{r}. \tag{1}$$

Если число r — дробное и положительное, то есть $r = \frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа, то

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}. \tag{2}$$

Формулы (1) и (2) определяют степени любого положительного числа a с любым положительным рациональным показателем r. Если же показатель r является рациональным и отрицательным, то выражение a^r определяется как величина, обратная к a^{-r}:

$$a^r = \frac{1}{a^{-r}}. \tag{3}$$

Здесь уже число $-r$ положительно.

Наконец, если $r = 0$, то a^r равно 1:

$$a^0 = 1. \tag{4}$$

Формулы (1), (2), (3) и (4) определяют степень положительного числа a для любого рационального показателя r.

Для дальнейшего нам потребуются следующие две теоремы.

Теорема 1. ***Если число a больше 1, то из двух степеней этого числа с положительными рациональными показателями больше та, показатель которой больше.***

Доказательство. Пусть $a > 1$ и $\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$, где m, n, p и q — натуральные числа. Покажем, что

$$a^{\frac{m}{n}} > a^{\frac{p}{q}}.$$

Действительно,

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \qquad a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Приведем эти корни к корням с одинаковыми показателями:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nq]{a^{mq}}; \qquad \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{pn}}.$$

Так как $\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$, то $mq > np$. Поскольку $a > 1$, то отсюда вытекает, что $a^{mq} > a^{np}$, а потому и $\sqrt[nq]{a^{mq}} > \sqrt[nq]{a^{np}}$, или

$$a^{\frac{m}{n}} > a^{\frac{p}{q}}.$$

Аналогично может быть доказана и другая теорема.

Теорема 2. ***Если число a больше нуля, но меньше 1, то из двух степеней этого числа с положительными рациональными показателями больше та, показатель которой меньше.***

Доказательство этой теоремы предлагаем учащимся провести самостоятельно.

Примеры. 1) $1{,}4 < 1{,}5$. Поэтому

$$3^{1.4} < 3^{1{,}5};$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{1.4} > \left(\frac{1}{3}\right)^{1{,}5}.$$

2) $0{,}51 < 0{,}52$. Поэтому $\pi^{0{,}51} < \pi^{0.52}$;

$$\left(\frac{\pi}{4}\right)^{0{,}51} > \left(\frac{\pi}{4}\right)^{0{,}52}.$$

Упражнение

1358. Какое число больше:

а) $5^{\frac{1}{2}}$ или $5^{\frac{2}{3}}$;

б) $\sqrt[7]{4^6}$ или $\sqrt[10]{4^9}$;

в) $\left(\frac{1}{3}\right)^{6{,}5}$ или $\left(\frac{1}{3}\right)^{7}$;

г) $\left(\frac{10}{11}\right)^{5\frac{1}{3}}$ или $\sqrt[100]{\left(\frac{10}{11}\right)^{534}}$?

Степень положительного числа с положительным иррациональным показателем § 175

В предыдущем параграфе мы напомнили, как определяется степень a^r любого положительного числа a с любым рациональным показателем r. Теперь нам предстоит определить степень a^x положительного числа a с положительным иррациональным показателем x. Мы начнем с рассмотре-

ния следующего частного примера: как следует понимать выражение $3^{\sqrt{2}}$?

Выпишем десятичные приближения числа $\sqrt{2}$ с недостатком:

$$1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ \ldots \qquad (1)$$

и с избытком:

$$2;\ 1{,}5;\ 1{,}42;\ 1{,}415;\ldots \qquad (2)$$

Все члены этих последовательностей представляют собой рациональные числа. А степень положительного числа с рациональным показателем нами уже определена. Поэтому мы вправе рассмотреть последовательности:

$$3^{1};\ 3^{1{,}4};\ 3^{1{,}41};\ 3^{1{,}414};\ \ldots, \qquad (3)$$
$$3^{2};\ 3^{1{,}5};\ 3^{1{,}42};\ 3^{1{,}415};\ \ldots. \qquad (4)$$

Как известно,

$$\begin{gathered} 1 < \sqrt{2} < 2 \\ 1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5 \\ 1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42 \\ 1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415 \\ \ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

Поэтому, принимая во внимание теорему 1 из предыдущего параграфа, естественно считать, что интересующее нас число $y = 3^{\sqrt{2}}$ удовлетворяет неравенствам:

$$\begin{gathered} 3^{1} < y < 3^{2} \\ 3^{1{,}4} < y < 3^{1{,}5} \\ 3^{1{,}41} < y < 3^{1{,}42} \\ 3^{1{,}414} < y < 3^{1{,}415} \\ \ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

Можно доказать, что существует и притом только одно число α, удовлетворяющее каждому из этих неравенств*. По определению это число α и принимается за $3^{\sqrt{2}}$.

Рассмотрим еще один пример: как следует понимать выражение $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$?

---

* Доказательство этого факта выходит за пределы нашей программы и потому здесь не приводится.

По аналогии с первым примером рассмотрим последовательности:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{1};\ \left(\frac{1}{3}\right)^{1,4};\ \left(\frac{1}{3}\right)^{1,41};\ \left(\frac{1}{3}\right)^{1,414};\ \ldots \tag{5}$$

и

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2};\ \left(\frac{1}{3}\right)^{1,5};\ \left(\frac{1}{3}\right)^{1,42};\ \left(\frac{1}{3}\right)^{1,415};\ \ldots . \tag{6}$$

Естественно считать, что интересующее нас число $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$ удовлетворяет неравенствам (см. теорему 2 из предыдущего параграфа):

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2} < y < \left(\frac{1}{3}\right)^{1}$$
$$\left(\frac{1}{3}\right)^{1,5} < y < \left(\frac{1}{3}\right)^{1,4}$$
$$\left(\frac{1}{3}\right)^{1,42} < y < \left(\frac{1}{3}\right)^{1,41}$$
$$\left(\frac{1}{3}\right)^{1,415} < y < \left(\frac{1}{3}\right)^{1,414}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Можно доказать, что существует и притом только одно число β, удовлетворяющее каждому из этих неравенств. По определению это число β и принимается за $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$.

Рассмотрение представленных двух примеров приводит нас к следующему определению.

Определение. *Если $a > 1$, то степенью этого числа с положительным иррациональным показателем x называется число, которое больше всех степеней числа a с показателями, равными десятичным приближениям числа x с недостатком, но меньше всех степеней числа a с показателями, равными десятичным приближениям числа x с избытком.*

Если $0 < a < 1$, то степенью этого числа с положительным иррациональным показателем x называется число, которое больше всех степеней числа a с показателями, равными десятичным приближениям числа x с избытком, но меньше всех степеней числа a с показателями, равными десятичным приближениям числа x с недостатком.

К этому остается добавить, что *для любого иррационального числа x*

$$1^{x} = 1.$$

Если $a > 0$ и x — положительное иррациональное число, то по определению

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}. \tag{1}$$

Например,

$$3^{-\sqrt{2}} = \frac{1}{3^{\sqrt{2}}}; \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{2}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}}.$$

Чтобы введенное определение было корректным, необходимо показать, что дробь $\frac{1}{a^x}$ в правой части равенства (1) имеет смысл при любых положительных a и x. Для этого нужно доказать, что

$$a^x \neq 0.$$

Действительно, по определению степени с положительным иррациональным показателем

$$a^{x'} \leqslant a^x \leqslant a^{x''},$$

где одно из чисел x' и x'' есть десятичное приближение числа x с недостатком, а другое — соответствующее десятичное приближение этого числа с избытком. Числа x' и x'' рациональные и положительные. Поэтому $a^{x'} > 0$ и $a^{x''} > 0$. Но число, заключенное между двумя положительными числами, само должно быть положительным. Поэтому $a^x > 0$.

Итак, мы определили степень положительного числа с любым действительным показателем. Степень *отрицательного* числа с действительным показателем, вообще говоря, не определена.

Основные свойства степеней положительных чисел с действительными показателями § 177

Степени положительных чисел обладают следующими основными свойствами:

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$,
2) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$,
3) $(ab)^x = a^x b^x$,
4) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$,
5) $(a^x)^y = a^{xy}$.

Эти свойства были частично доказаны нами в главе IV (ч. I) для рациональных показателей. На самом же деле они верны и для иррациональных показателей. На доказательстве этого факта мы не будем останавливаться.

Примеры.

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{2}} = (3^{-1})^{-\sqrt{2}} = 3^{\sqrt{2}}$.

2) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}\right]^{-\sqrt{8}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{16}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = (3^{-1})^{-4} = 3^4 = 81$.

3) $\frac{5^{\sqrt{8}}}{5^{\sqrt{2}}} = 5^{\sqrt{8}-\sqrt{2}} = 5^{\sqrt{2}}$.

Упражнения

Доказать тождества (№ 1359, 1360):

1359. $\left(\frac{1}{2}\right)^{12} \cdot 4^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{\sqrt{27}} \cdot 16^3 = (4^{\sqrt{3}})^{-4}$.

1360. $\frac{12^{\sqrt{48}}}{4^{\sqrt{108}}} \cdot \frac{2^{27\sqrt{3}}}{6^{\sqrt{27}}} = (6 \cdot 2^{19})^{\sqrt{3}}$.

Упростить выражения:

1361. $[(\sqrt[3]{3})^{\sqrt{3}}]^{-2\sqrt{3}}$.

1362. $\left[(\sqrt{8})^{-4\frac{1}{3}}\right]^{\frac{\sqrt{3}}{26}}$.

Показательная функция и ее график § 178

Показательной функцией называется функция вида

$$y = a^x,$$

где a — некоторое фиксированное положительное число.

Примером показательных функций могут служить функции:

$$y = 2^x;\ y = \left(\frac{1}{3}\right)^x;\ y = (0{,}1)^x.$$

В природе наблюдается целый ряд явлений, которые математически можно описать с помощью показательных функций. Например, распад радия приближенно можно описать соотношением

$$m(t) = m(0) \cdot (0{,}9996)^t,$$

где $m(0)$ — первоначальное количество радия в граммах, а $m(t)$ — то количество радия, которое останется через t лет после начала распада. По показательному закону изменяется также атмосферное давление с изменением высоты.

В определении показательной функции $y = a^x$ указывается, что число a положительное. Объясняется это тем, что степень отрицательного числа с произвольным показателем, вообще говоря, не определена.

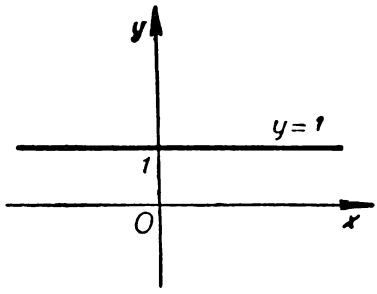

Рис. 245.

Среди всех положительных значений a следует особо выделить $a = 1$. При таком a функция $y = a^x$ имеет вид $y = 1$ (рис. 245). Такая функция не представляет особого интереса. Поэтому в дальнейшем, говоря о показательной функции $y = a^x$, мы всегда будем предполагать, что $a > 0$ и $a \neq 1$.

Перейдем к построению графика показательной функции. В качестве примера на одном чертеже построим графики функций $y = 2^x$ и $y = 10^x$, а на другом — графики функций $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ и $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$. Для этого предварительно составим таблицы значений этих функций. Для функций $y = 2^x$ и $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ в качестве значений x выберем

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$y = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	...
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	...

$$-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2 \text{ и } 3.$$

Для функций $y = 10^x$ и $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$ целесообразно выбрать другие значения x, поскольку при $x = \pm 2,\ \pm 3$ указанные функции принимают либо слишком большие, либо слишком малые значения. Например, $10^3 = 1000$, $\left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{1}{1000}$. Такие значения y трудно зафиксировать на графике. Поэтому в данном случае в качестве значений x удобнее выбрать, например, такие числа: -1, $-\frac{3}{4}$, $-\frac{2}{4}$, $-\frac{1}{4}$, 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$ и 1.

Соответственные значения y можно вычислить последовательно:

$10^0 = 1$.

$10^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{10} = \sqrt{\sqrt{10}} \approx \sqrt{3{,}1622} \approx 1{,}8$;

$10^{\frac{2}{4}} = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} \approx 3{,}2$;

$$10^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{10^3} = \sqrt{\sqrt{1000}} \approx \sqrt{31{,}6227} \approx 5{,}6;$$

$$10^1 = 10;$$

$$10^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{10^{\frac{1}{4}}} \approx \frac{1}{1{,}8} \approx 0{,}6$$

и т. д.

В итоге получается следующая таблица приближенных значений функций $y = 10^x$ и $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$:

x	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{2}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	1	...
$y = 10^x$	0,1	0,2	0,3	0,6	1,0	1,8	3,2	5,6	10	...
$x = \left(\frac{1}{10}\right)^x$	10	5,6	3,2	1,8	1,0	0,6	0,3	0,2	0,1	...

Используя составленные таблицы, можно в общих чертах представить себе поведение рассматриваемых функций. Точные графики функций $y = 2^x$ и $y = 10^x$ приведены на рисунке 246, а функций $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ и $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$ на рисунке 247.

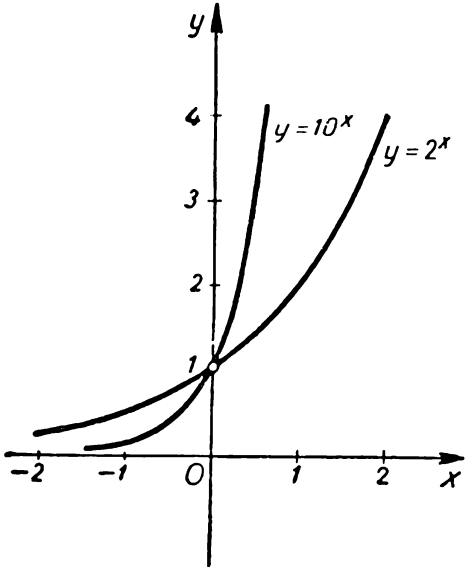

Рис. 246.

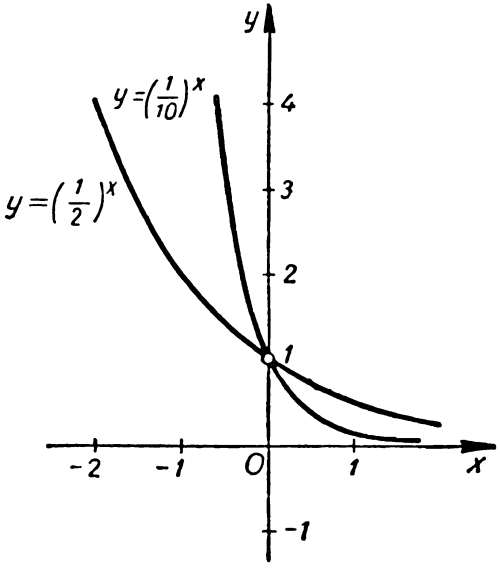

Рис. 247.

Упражнения

1363. Используя график функции $y = 2^x$, найти

$$\sqrt{2},\ \sqrt[3]{4},\ \frac{1}{\sqrt[3]{2}},\ \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

При каких значениях аргумента эта функция принимает значения, равные 0,5; 0,9; 1,0; 1,8; 2,7?

1364. Используя график функции $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$, найти

$$\sqrt[5]{\frac{1}{10}};\quad 10^{-3};\quad \sqrt[5]{0{,}001};\quad \left(\frac{1}{10}\right)^{-0{,}7}.$$

При каких значениях x эта функция принимает значения, равные 0,5; 0,9; 1,0; 3,0; 5,0?

1365. Построить графики функций:

а) $y = 2^{x-1}$; в) $y = 2^{|x|}$; д) $y = 2^x + 1$;
б) $y = 2^{x+1}$; г) $y = 2^x - 1$; е) $y = 2^{-|x|}$.

1366. Построить графики функций:

а) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$; в) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$; д) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$;

б) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$; г) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$; е) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-|x|}$.

1367. На одном и том же рисунке построить графики функций

$$y = 3^x \text{ и } y = 3^{-x}.$$

Основные свойства показательной функции § 179

В этом параграфе мы изучим основные свойства показательной функции

$$y = a^x. \qquad (1)$$

Напомним, что под a в формуле (1) мы подразумеваем любое фиксированное положительное число, отличное от 1.

Свойство 1. ***Областью определения показательной функции является совокупность всех действительных чисел.***

В самом деле, при положительном a выражение a^x определено для любого действительного числа x.

Свойство 2. ***Показательная функция принимает только положительные значения.***

Действительно, если $x > 0$, то, как было доказано в § 176,

$$a^x > 0.$$

Если же $x < 0$, то

$$a^x = \frac{1}{a^{-x}},$$

где — x уже больше нуля. Поэтому $a^{-x} > 0$. Но тогда и

$$a^x = \frac{1}{a^{-x}} > 0.$$

Наконец, при $x = 0$

$$a^x = 1.$$

2-е свойство показательной функции имеет простое графическое истолкование. Оно заключается в том, что график этой функции (см. рис. 246 и 247) располагается целиком выше оси абсцисс.

Свойство 3. ***Если $a > 1$, то при $x > 0$ $a^x > 1$, а при $x < 0$ $a^x < 1$. Если же $a < 1$, то, наоборот, при $x > 0$ $a^x < 1$, а при $x < 0$ $a^x > 1$.***

Это свойство показательной функции также допускает простую геометрическую интерпретацию. При $a > 1$ (рис. 246) кривые $y = a^x$ располагаются выше прямой $y = 1$ при $x > 0$ и ниже прямой $y = 1$ при $x < 0$. Если же $a < 1$ (рис. 247), то, наоборот, кривые $y = a^x$ располагаются ниже прямой $y = 1$ при $x > 0$ и выше этой прямой при $x < 0$.

Приведем строгое доказательство 3-го свойства. Пусть $a > 1$ и x — произвольное положительное число. Покажем, что

$$a^x > 1.$$

Если число x рационально $\left(x = \frac{m}{n}\right)$, то $a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Поскольку $a > 1$, то и $a^m > 1$, но корень из числа, большего единицы, очевидно, также больше 1.

Если x иррационально, то существуют положительные рациональные числа x' и x'', которые служат десятичными приближениями числа x:

$$x' < x < x''.$$

Но тогда по определению степени с иррациональным показателем

$$a^{x'} < a^x < a^{x''}.$$

Как показано выше, число $a^{x'}$ больше единицы. Поэтому и число a^x, большее, чем $a^{x'}$, также должно быть больше 1.

Итак, мы показали, что при $a > 1$ и произвольном положительном x

$$a^x > 1.$$

Если бы число x было отрицательным, то мы имели бы

$$a^x = \frac{1}{a^{-x}},$$

где число $-x$ было бы уже положительным. Поэтому $a^{-x}>1$. Следовательно,

$$a^x = \frac{1}{a^{-x}} < 1.$$

Таким образом, при $a > 1$ и произвольном отрицательном x

$$a^x < 1.$$

Случай, когда $0 < a < 1$, легко сводится к уже рассмотренному случаю. Учащимся предлагается убедиться в этом самостоятельно.

Свойство 4. ***Если $x = 0$, то независимо от a $a^x = 1$.***

Это вытекает из определения нулевой степени: нулевая степень любого числа, отличного от нуля, равна 1. Графически это свойство выражается в том, что при любом a кривая $y = a^x$ (см. рис. 246 и 247) пересекает ось y в точке с ординатой 1.

Свойство 5. ***При $a > 1$ показательная функция $y = a^x$ является монотонно возрастающей, а при $a < 1$ — монотонно убывающей.***

Это свойство также допускает простую геометрическую интерпретацию.

При $a > 1$ (рис. 246) кривая $y = a^x$ с ростом x поднимается все выше и выше, а при $a < 1$ (рис. 247) — опускается все ниже и ниже.

Приведем строгое доказательство 5-го свойства.

Пусть $a > 1$ и $x_2 > x_1$. Покажем, что

$$a^{x_2} > a^{x_1}.$$

Поскольку $x_2 > x_1$, то $x_2 = x_1 + d$, где d — некоторое положительное число. Поэтому

$$a^{x_2} - a^{x_1} = a^{x_1+d} - a^{x_1} = a^{x_1}(a^d - 1).$$

По 2-му свойству показательной функции $a^{x_1} > 0$. Так как $d > 0$, то по 3-му свойству показательной функции $a^d > 1$. Оба множителя в произведении $a^{x_1}(a^d - 1)$ положительны, поэтому и само это произведение положительно. Значит, $a^{x_2} - a^{x_1} > 0$, или $a^{x_2} > a^{x_1}$, что и требовалось доказать.

Итак, при $a > 1$ функция $y = a^x$ является монотонно возрастающей. Аналогично доказывается, что при $a < 1$ функция $y = a^x$ является монотонно убывающей.

Следствие. ***Если две степени одного и того же положительного числа, отличного от 1, равны, то равны и их показатели.***

Другими словами, если

$$a^b = a^c \ (a > 0 \text{ и } a \neq 1),$$

то

$$b = c.$$

Действительно, если бы числа b и c были не равны, то в силу монотонности функции $y = a^x$ большему из них соответствовало бы при $a > 1$ большее, а при $a < 1$ меньшее значение этой функции. Таким образом, было бы или $a^b > a^c$, или $a^b < a^c$. И то и другое противоречит условию $a^b = a^c$. Остается признать, что $b = c$.

Свойство 6. ***Если $a > 1$, то при неограниченном возрастании аргумента x ($x \to \infty$) значения функции $y = a^x$ также неограниченно растут ($y \to \infty$). При неограниченном убывании аргумента x ($x \to -\infty$) значения этой функции стремятся к нулю, оставаясь при этом положительными ($y \to 0$; $y > 0$).***

Принимая во внимание доказанную выше монотонность функции $y = a^x$, можно сказать, что в рассматриваемом случае функция $y = a^x$ монотонно возрастает от 0 до ∞.

Если $0 < a < 1$, то при неограниченном возрастании аргумента x ($x \to \infty$) значения функции $y = a^x$ стремятся к нулю, оставаясь при этом положительными ($y \to 0$; $y > 0$). При неограниченном убывании аргумента x ($x \to -\infty$) значения этой функции неограниченно растут ($y \to \infty$).

В силу монотонности функции $y = a^x$ можно сказать, что в этом случае функция $y = a^x$ монотонно убывает от ∞ до 0.

6-е свойство показательной функции наглядно отражено на рисунках 246 и 247. Строго доказывать его мы не будем.

Нам осталось лишь установить область изменения показательной функции $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$).

Выше мы доказали, что функция $y = a^x$ принимает только положительные значения и либо монотонно возрастает от 0 до ∞ (при $a > 1$), либо монотонно убывает от ∞ до 0 (при $0 < a < 1$). Однако остался невыясненным следующий вопрос: не претерпевает ли функция $y = a^x$ при своем изменении каких-нибудь скачков? Любые ли положительные значения она принимает? Вопрос этот решается положительно. Если $a > 0$ и $a \neq 1$, то, каково бы ни было положительное число y_0, обязательно найдется x_0, такое, что

$$a^{x_0} = y_0.$$

(В силу монотонности функции $y = a^x$ указанное значение x_0 будет, конечно, единственным.)

Доказательство этого факта выходит за пределы нашей программы. Геометрическая интерпретация его состоит в том, что при любом положительном значении y_0 график функции $y = a^x$ обязательно пересечется с прямой $y = y_0$ и притом лишь в одной точке (рис. 248).

Отсюда можно сделать следующий вывод, который мы формулируем в виде свойства 7.

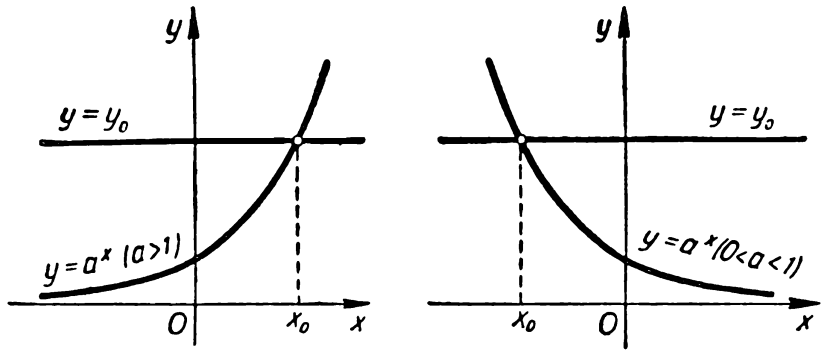

Рис. 248.

Свойство 7. ***Областью изменения показательной функции $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ служит множество всех положительных чисел.***

Упражнения

1368. Найти области определения следующих функций:

а) $y = 2^{\frac{1}{x}}$; б) $y = \left(\frac{1}{10}\right)^{\sqrt{x^2-1}}$; в) $y = \frac{1}{3^{x^2}}$.

1369. Какие из данных чисел больше 1 и какие меньше 1:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}}$; 4) $\pi^{-\frac{2}{5}}$; 7) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-\sqrt{1{,}001}}$;

2) $(\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}$; 5) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{5}}$; 8) $\left(\frac{\pi+1}{4}\right)^{-\sqrt{2}}$;

3) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\pi}$; 6) $\left(\frac{\pi}{3}\right)^{\sqrt{1{,}001}}$; 9) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$?

1370. На основании какого свойства показательной функции можно утверждать, что

а) $\left(\frac{5}{7}\right)^{2,6} < \left(\frac{5}{7}\right)^{2,5}$; б) $\left(\frac{4}{3}\right)^{1,3} > \left(\frac{4}{3}\right)^{1,2}$?

1371. Какое число больше:

а) $\pi^{-\sqrt{3}}$ или $\left(\frac{1}{\pi}\right)^{-\sqrt{3}}$; в) $\left(\frac{2}{3}\right)^{1+\sqrt{6}}$ или $\left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$;

б) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{1+\sqrt{3}}$ или $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2}$; г) $(\sqrt{3})^{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ или $(\sqrt{3})^{\sqrt{3}-2}$?

1372. Равносильны ли неравенства:

а) $a^x > a^4$ и $x > 4$; в) $\left(\frac{1}{16}\right)^x > \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}$ и $2x < x - 1$?

б) $5^{x^2} < 5^x$ и $x^2 < x$;

1373. Что можно сказать о числах x и y, если $a^x = a^y$, где a — заданное положительное число?

1374. 1) Можно ли среди всех значений функции $y = 2^x$ выделить:

а) наибольшее значение; б) наименьшее значение?

2) Можно ли среди всех значений функции $y = 2^{|x|}$ выделить:

а) наибольшее значение; б) наименьшее значение?

Логарифм числа по данному основанию § 180

Алгебру иногда называют «арифметикой семи действий», желая этим подчеркнуть, что, кроме четырех арифметических действий (сложения, вычитания, умножения и деления), она рассматривает также возведение в степень и два обратных к нему действия.

Обозначим основание степени через a, показатель через x, степень через b. Тогда можно написать:

$$b = a^x. \qquad (1)$$

«Пятое» алгебраическое действие — возведение в степень — состоит в нахождении числа b по известным a и x. Это действие мы подробно изучили в главе IV (часть I), о нем говорилось также в начале этой главы.

«Шестое» алгебраическое действие состоит в нахождении числа a по известным значениям b и x. Возводя обе части равенства (1) в степень $\frac{1}{x}$ (если только $x \neq 0$), получаем:

$$a = b^{\frac{1}{x}}.$$

Поэтому «шестое» алгебраическое действие легко сводится к «пятому».

Теперь мы переходим к изучению «седьмого» алгебраического действия — нахождению показателя x по известным значениям степени b и основания a. Эта задача по существу состоит в том, чтобы решить уравнение

$$a^x = b, \qquad (2)$$

где a и b — некоторые заданные, а x — неизвестная величина. Сразу же заметим, что данная задача разрешима не всегда.

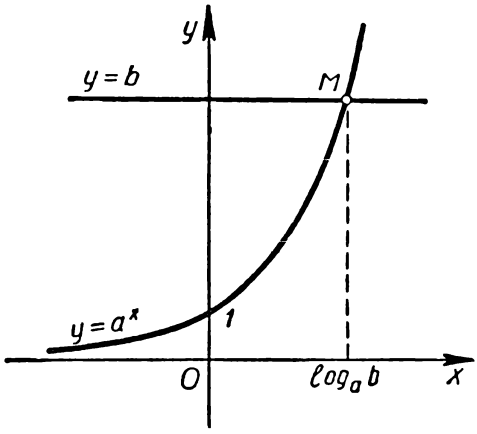

Рис. 249.

Если, например, в уравнении (2) число a положительно, а число b отрицательно, то это уравнение корней не имеет. Но если только a и b положительны и $a \neq 1$, то оно непременно имеет и притом только один корень. Напомним, что график показательной функции $y = a^x$ обязательно пересекается с прямой $y = b$ и притом лишь в одной точке (см. рис. 249). Абсцисса точки пересечения и представляет собой корень уравнения (2).

Корень уравнения (2) принято обозначать $\log_a b$ (читается: логарифм числа b по основанию a).

Логарифм числа b по основанию a есть показатель степени, в которую нужно возвысить число a, чтобы получить число b:

$$a^{\log_a b} = b.$$

Примеры.

1) $2^4 = 16$, поэтому $\log_2 16 = 4$.

2) $2^{-3} = \frac{1}{8}$, поэтому $\log_2 \frac{1}{8} = -3$.

3) $6^0 = 1$, поэтому $\log_6 1 = 0$.

С логарифмами мы сталкиваемся при решении целого ряда прикладных задач. В качестве примера рассмотрим следующую задачу.

Как мы знаем, распад радия приближенно описывается формулой (см. § 178):

$$m(t) = m(0) \cdot (0{,}9996)^t,$$

где $m(0)$ — первоначальное количество радия в граммах, а $m(t)$ — количество радия (также в граммах) через t лет. Выясним, каков период полураспада радия, то есть через сколько лет количество радия уменьшается вдвое.

Искомое число лет t является корнем уравнения

$$m(0) \cdot (0{,}9996)^t = 0{,}5m(0),$$

или

$$(0{,}9996)^t = 0{,}5.$$

Поэтому

$$t = \log_{0{,}9996} 0{,}5.$$

В дальнейшем мы научимся находить такие логарифмы с помощью специальных таблиц, а пока нам придется принять на веру, что

$$\log_{0{,}9996} 0{,}5 \approx 1600.$$

Таким образом, количество радия уменьшается вдвое примерно через каждые 1600 лет.

Упражнения

1375. Данные равенства записать в виде логарифмических равенств (например, $3^2 = 9 \rightarrow \log_3 9 = 2$):

а) $2^2 = 4$; в) $4^4 = 256$; д) $2^{-2} = \frac{1}{4}$;

б) $3^3 = 27$; г) $5^3 = 125$; е) $3^{-4} = \frac{1}{81}$;

ж) $7^0 = 1$; и) $8^{\frac{2}{3}} = 4$; л) $8^0 = 1$;

з) $4^{\frac{1}{2}} = 2$; к) $\sqrt[3]{27} = 3$; м) $\sqrt[3]{8} = 2$.

1376. Проверить справедливость следующих равенств:

а) $\log_4 16 = 2$; в) $\log_5 125 = 3$; д) $\log_3 \frac{1}{81} = -4$;

б) $\log_3 243 = 5$; г) $\log_7 \frac{1}{49} = -2$; е) $\log_{10} 1 = 0$.

1377. Найти логарифмы следующих чисел по основанию 2:

$$4;\ 16;\ 32;\ 1;\ 0{,}5;\ 0{,}125;\ \sqrt{2};\ \frac{1}{\sqrt{2}};\ 2\sqrt{2}.$$

1378. Найти логарифмы следующих чисел по основанию $\frac{1}{2}$:

$$1;\ 2;\ 8;\ 32;\ 0{,}25;\ \frac{1}{16};\ \frac{1}{\sqrt{2}};\ \sqrt{2};\ 4\sqrt{2}.$$

1379. Найти логарифмы следующих чисел по основанию 3:

$$3;\ 1;\ 27;\ 81;\ \frac{1}{9};\ \frac{1}{243};\ \sqrt{3};\ \frac{1}{\sqrt{3}};\ 3\sqrt{3}.$$

1380. Найти логарифмы следующих чисел по основанию $\frac{1}{3}$:

$$\frac{1}{3};\ \frac{1}{27};\ \frac{1}{81};\ 3;\ 27;\ \frac{1}{\sqrt{3}};\ \sqrt{3};\ \frac{1}{9\sqrt{3}}.$$

1381. Вычислить:

а) $\log_2 \left(\sin \frac{\pi}{6}\right)$; в) $\log_3 \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}\right)$;

б) $\log_2 \left(\sin \frac{\pi}{2}\right)$; г) $\log_3 \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}\right)$.

1382. Доказать тождество

$$\log_{a^n} (a^m) = \frac{m}{n}.$$

Используя это тождество, вычислить:

а) $\log_8 16$; г) $\log_{16} 64$; ж) $\log_{\frac{1}{5}} 125$;

б) $\log_2 2\sqrt{2}$; д) $\log_3 27$; з) $\log_4 \left(\sin \frac{\pi}{4}\right)$;

в) $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{2}$; е) $\log_{27} 243$; и) $\log_9 \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}\right)$.

1383. Используя основное логарифмичесиое тождество

$$a^{\log_a b} = b,$$

вычислить:

1) $2^{\log_2 8}$; 4) $3^{2\log_3 9}$; 7) $3^{-\frac{1}{3}\log_8 8}$; 10) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 6}$;

2) $3^{\log_3 9}$; 5) $5^{\frac{1}{2}\log_6 49}$; 8) $4^{\log_2 7}$; 11) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_2 5}$;

3) $2^{5\log_2 3}$; 6) $2^{-4\log_2 1}$; 9) $9^{\log_3 10}$; 12) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-2\log_3 12}$.

1384. Доказать, что при любом положительном $a \neq 1$
$\log_a(\sin 1°) \cdot \log_a(\sin 2°) \ldots \log_a(\sin 89°) \cdot \log_a(\sin 90°) = 0$.

Логарифмическая функция и ее график § 181

Логарифмической функцией называется функция вида

$$y = \log_a x,$$

где a — некоторое фиксированное положительное число, отличное от 1.

Формула $y = \log_a x$ выражает то же самое, что и формула

$$a^y = x. \quad (1)$$

Отсюда легко установить связь между логарифмической функцией и показательной функцией

$$y = a^x. \quad (2)$$

Если показательная функция (2) описывает изменение степени в зависимости от изменения ее показателя, то ввиду (1) логарифмическая функция, наоборот, описывает изменение показателя степени в зависимости от изменения степени. Поэтому логарифмическая функция $y = \log_a x$ называется *обратной* к показательной функции $y = a^x$.

Формула (1) получается из формулы (2), если в последней переменные величины x и y поменять местами. Отсюда следует, что значения логарифмической функции $y = \log_a x$ легко получить из соответствующих значений показательной функции $y = a^x$, если то, что для показательной функции было y-ом, для логарифмической функции рассматривать как x, а то, что для показательной функции было x-ом, для логарифмической функции рассматривать как y.

Таблицы значений показательных функций $y = 2^x$, $y = 10^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ и $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$ были составлены нами в § 178. Используя их, мы получаем таблицы (см. стр. 82) приближенных значений функций:

$$y = \log_2 x,\ y = \log_{10} x,\ y = \log_{\frac{1}{2}} x \text{ и } y = \log_{\frac{1}{10}} x.$$

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	...
$\log_2 x$	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$\log_{\frac{1}{2}} x$	3	2	1	0	-1	-2	-3	...

x	0,1	0,2	0,3	0,6	1,0	1,8	3,2	5,6	10,0	...
$\log_{10} x$	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	...
$\log_{\frac{1}{10}} x$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	-1	...

Эти таблицы дают некоторое (хотя и весьма ограниченное) представление о поведении рассматриваемых функций. В частности, они могут быть использованы при построении графиков этих функций.

На рисунке 250 вы видите графики функций $y = \log_2 x$ и $y = \log_{10} x$, а на рисунке 251 — графики функций $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ и $y = \log_{\frac{1}{10}} x$.

Следует обратить внимание на следующее важное обстоятельство. Когда $x \to 0$, то логарифмическая кривая $y = \log_a x$ неограниченно приближается к оси ординат. Но оси этой она никогда не достигает (см. рис. 250 и 251). Об этом не следует забывать при построении логарифмических кривых.

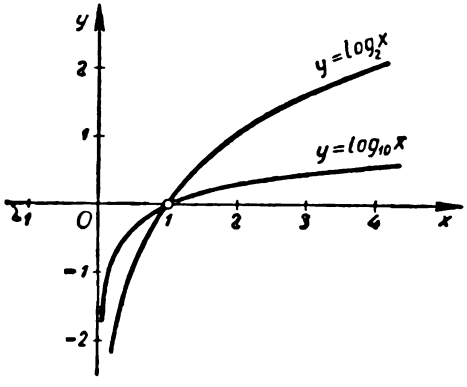

Рис. 250.

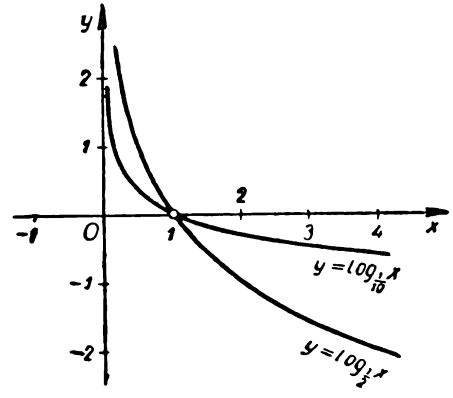

Рис. 251.

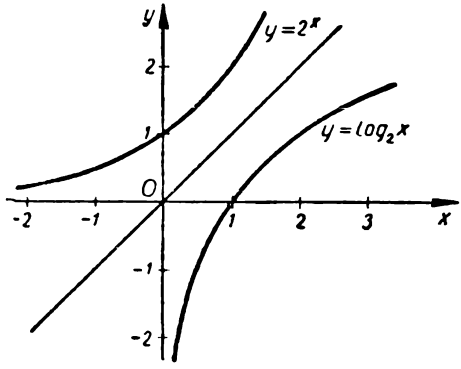

Рис. 252.

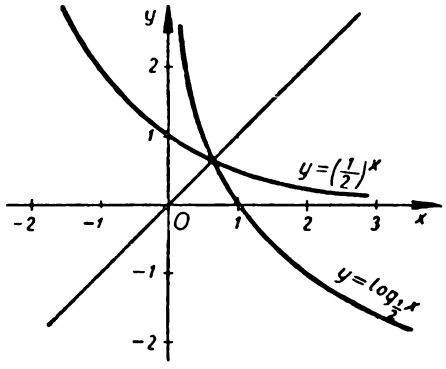

Рис. 253.

Для сравнения графика логарифмической функции $y = \log_a x$ с графиком соответствующей ей показательной функции $y = a^x$ обратимся к рисункам 252 ($a = 2$) и 253 $\left(a = \frac{1}{2}\right)$. Как видно из этих рисунков, графики логарифмической функции и соответствующей ей показательной функции симметричны друг другу относительно биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов. Если, например, рисунок 252 перегнуть по этой биссектрисе, то графики функций $y = 2^x$ и $y = \log_2 x$ наложатся друг на друга.

Упражнения

1385. Пересекается ли логарифмическая кривая $y = \log_a x$: а) с осью x; б) с осью y?

1386. Используя график функции $y = \log_2 x$, найти логарифмы по основанию 2 чисел 0,5; 0,6; 0,7; 1,5; 2,3; 3,0.

Логарифмы каких чисел по основанию 2 равны 0,7; 0,8; 0,9; 1,0; 1,5?

1387. Исходя из графика функции $y = \log_2 x$, построить графики функций:

а) $y = \log_2 (x - 1)$; в) $y = -\log_2 x$; д) $y = |\log_2 x|$;
б) $y = \log_2 (x + 2)$; г) $y = \log_2 |x|$; е) $y = \log_2 (-x)$.

1388. Построить графики функций:

а) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$; в) $y = \log_{\frac{1}{3}} (x + 2)$; д) $y = \log_{\frac{1}{3}} |x|$;
б) $y = \log_{\frac{1}{3}} (x - 1)$; г) $y = |\log_{\frac{1}{3}} x|$; е) $y = \log_{\frac{1}{3}} (-x)$.

1389. На одном и том же рисунке построить графики функций

$$y = \log_3 x \text{ и } y = \log_{\frac{1}{3}} x.$$

В этом параграфе мы изучим основные свойства логарифмической функции

$$y = \log_a x. \tag{1}$$

Напомним, что под a в формуле (1) мы подразумеваем любое фиксированное положительное число, отличное от 1.

Свойство 1. ***Областью определения логарифмической функции служит множество всех положительных чисел.***

Действительно, пусть b есть произвольное положительное число. Покажем, что выражение $\log_a b$ определено. Как мы знаем, $\log_a b$ есть не что иное, как корень уравнения

$$a^z = b. \tag{2}$$

Если a и b — положительные числа, причем $a \neq 1$, то такое уравнение по свойствам 2 и 5 показательной функции (см. § 179) всегда имеет и притом только один корень. Этим корнем и является $\log_a b$. Следовательно, $\log_a b$ в данном случае определен.

Покажем теперь, что если $b \leqslant 0$, то выражение $\log_a b$ не определено.

Действительно, если бы это выражение имело смысл, то оно давало бы корень уравнения (2); в таком случае должно было бы выполняться равенство

$$a^{\log_a b} = b.$$

На самом же деле это равенство не выполняется, поскольку левая его часть представляет собой положительное, а правая — отрицательное число или нуль.

Итак, выражение $\log_a b$ ($a > 0$, $a \neq 1$) определено для всех положительных значений b, но не определено ни для какого отрицательного значения b, ни для $b = 0$. А это и означает, что областью определения функции $y = \log_a x$ является множество всех положительных чисел.

1-е свойство логарифмической функции доказано. Геометрическая интерпретация этого свойства заключается в том, что график функции $y = \log_a x$ целиком расположен в правой полуплоскости, которая соответствует только положительным значениям x (см. рис. 250 и 251).

Свойство 2. ***Областью изменения логарифмической функции служит множество всех чисел.***

Это означает, что выражение $\log_a x$ при различных значениях x может принимать любые числовые значения.

Пусть b — произвольное действительное число. Покажем, что существует число x, которое удовлетворяет условию

$$\log_a x = b. \tag{3}$$

Тем самым и будет доказано свойство 2.

Соотношение (3) означает то же самое, что и соотношение

$$a^b = x.$$

Число a — положительное. А степень любого положительного числа с произвольным показателем всегда определена. Поэтому, выбрав в качестве искомого значения x число a^b, мы и удовлетворим условию (3).

Свойство 3. ***При $a > 1$ логарифмическая функция $y = \log_a x$ является монотонно возрастающей, а при $0 < a < 1$ — монотонно убывающей.***

Пусть $a > 1$ и $x_2 > x_1$. Докажем, что

$$\log_a x_2 > \log_a x_1.$$

Для доказательства предположим противное: $\log_a x_2 < \log_a x_1$ или $\log_a x_2 = \log_a x_1$. При $a > 1$ показательная функция $y = a^x$ монотонно возрастает. Поэтому из условия $\log_a x_2 < \log_a x_1$ вытекает, что $a^{\log_a x_2} < a^{\log_a x_1}$. Но $a^{\log_a x_2} = x_2$, $a^{\log_a x_1} = x_1$. Следовательно, $x_2 < x_1$. А это противоречит условию, согласно которому $x_2 > x_1$. К противоречию приводит и другое предположение: $\log_a x_1 = \log_a x_2$. В этом случае должно было бы быть $a^{\log_a x_1} = a^{\log_a x_2}$, или $x_1 = x_2$. Остается признать, что

$$\log_a x_2 > \log_a x_1.$$

Тем самым мы доказали, что при $a > 1$ функция $y = \log_a x$ является монотонно возрастающей.

Случай, когда $a < 1$, предлагаем учащимся рассмотреть самостоятельно.

3-е свойство логарифмической функции допускает простую геометрическую интерпретацию. При $a > 1$ график функции $y = \log_a x$ с ростом x все выше и выше поднимается (см. рис. 250), а при $a < 1$ он с ростом x все ниже и ниже опускается (см. рис. 251).

Следствие. ***Если логарифмы двух чисел по одному и тому же положительному основанию, отличному от 1, равны, то равны и сами эти числа.***

Другими словами, из условия

$$\log_a x = \log_a y \ (a > 0, \ a \neq 1)$$

вытекает, что

$$x = y.$$

Действительно, если бы одно из чисел x и y было больше другого, то в силу монотонности логарифмической функции одно из чисел $\log_a x$ и $\log_a y$ было бы больше другого. Но это не так. Следовательно, $x = y$.

Свойство 4. ***При $x = 1$ логарифмическая функция $y = \log_a x$ принимает значение, равное нулю.***

Графически это означает, что независимо от a кривая $y = \log_a x$ пересекается с осью x в точке с абсциссой $x = 1$ (см. рис. 250 и 251).

Для доказательства 4-го свойства достаточно заметить, что при любом положительном a

$$a^0 = 1.$$

Поэтому $\log_a 1 = 0$.

Свойство 5. ***Пусть $a > 1$. Тогда при $x > 1$ функция $y = \log_a x$ принимает положительные, а при $0 < x < 1$ — отрицательные значения.***

Если же $0 < a < 1$, то, наоборот, при $x > 1$ функция $y = \log_a x$ принимает отрицательные, а при $0 < x < 1$ — положительные значения.

Это свойство логарифмической функции также допускает простую графическую интерпретацию. Пусть, например, $a > 1$. Тогда та часть кривой $y = \log_a x$, которая соответствует значениям $x > 1$, располагается выше оси x, а та часть этой кривой, которая соответствует значениям $0 < x < 1$, находится ниже оси x (см. рис. 250). Аналогично может быть интерпретирован и случай, когда $a < 1$ (рис. 251).

5-е свойство логарифмической функции является простым следствием 3-го и 4-го свойств. Для определенности рассмотрим случай, когда $a > 1$. Тогда по 3-му свойству функция $y = \log_a x$ будет монотонно возрастающей. Поэтому если $x > 1$, то $\log_a x > \log_a 1$. Но по 4-му свойству $\log_a 1 = 0$. Следовательно, при $x > 1$ $\log_a x > 0$. При $x < 1$ $\log_a x < \log_a 1$, то есть $\log_a x < 0$.

Аналогично может быть рассмотрен и случай, когда $a < 1$. Учащимся предлагается разобрать его самостоятельно.

К рассмотренным пяти свойствам логарифмической функции мы без доказательства добавим еще одно свойство, справедливость которого наглядно отражается на рисунках 250 и 251.

Свойство 6. ***Если $a > 1$, то при $x \to 0$ значения функции $y = \log_a x$ неограниченно убывают ($y \to -\infty$). Если $0 < a < 1$, то при $x \to 0$ значения функции $y = \log_a x$ неограниченно возрастают ($y \to \infty$).***

Упражнения

1390. Найти области определения следующих функций:

а) $y = \log_2 (1 + x)$;
б) $y = \log_{\frac{1}{3}} (x^2 + 1)$;
в) $y = \log_{10} (4 + x^2)$;
г) $y = \log_5 (-x)$;
д) $y = \log_7 |x|$;
е) $y = \log_3 (x^2 + x - 2)$;
ж) $y = \log_{0,5} (5x - x^2 - 6)$;
з) $y = \log_6 (x^2 + x + 1)$.

1391. Для каких значений x в интервале $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ определены выражения:

а) $\log_2 (\sin x)$; в) $\log_4 (\operatorname{tg} x)$;
б) $\log_3 (\cos x)$; г) $\log_5 (\operatorname{ctg} x)$?

1392. Что вы можете сказать о наибольших и наименьших значениях функций:

а) $y = \log_2 x$; б) $y = |\log_2 x|$?

1393. На основании какого свойства логарифмической функции можно утверждать, что

а) $\log_{10} 5 > \log_{10} 4$; б) $\log_{0,1} 5 < \log_{0,1} 4$?

1394. Какое число больше:

а) $\log_2 5$ или $\log_2 6$; в) $\log_{\frac{1}{3}} 2$ или $\log_{\frac{1}{3}} 4$;

б) $\log_5 \frac{1}{2}$ или $\log_5 \frac{1}{3}$; г) $\log_{\frac{1}{7}} \frac{4}{5}$ или $\log_{\frac{1}{7}} \frac{5}{6}$?

1395. Решить относительно x неравенства:

а) $\log_2 x > \log_2 3$; г) $\log_{\frac{1}{2}} (3x) \leqslant \log_{\frac{1}{2}} 6$;

б) $\log_3 x^2 > \log_3 4$; д) $\log_{10} (x^2 - 1) \geqslant \log_{10} (4x + 4)$;

в) $\log_{\frac{1}{3}} x \geqslant \log_{\frac{1}{3}} 2$; е) $\log_{0,1} (1 - x^2) > \log_{0,1} (2x + 2)$.

1396. Что можно сказать о числе a, если

а) $\log_a 7 > \log_a 6$; в) $\log_a \frac{1}{3} < \log_a \frac{1}{2}$;

б) $\log_a 5 < \log_a 4$; г) $\log_a 5 > 0$?

1397. Что можно сказать о числе a, если при любых значениях x

$$\log_a (x^2 + 1) > \log_a x?$$

1398. Между какими последовательными целыми числами заключены логарифмы:

а) $\log_2 5$; б) $\log_3 8$; в) $\log_{\frac{1}{3}} 7$; г) $\log_{\frac{1}{2}} 9$?

1399. Какие из данных чисел являются положительными и какие отрицательными:

а) $\log_2 5$; в) $\log_{\frac{1}{2}} 5$; д) $\log_7 1$; ж) $\log_{\frac{\pi}{3}} 4$;

б) $\log_2 \frac{1}{3}$; г) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$; е) $\log_\pi 3$; з) $\log_{\frac{\pi}{4}} 4$?

Теорема 1. ***Логарифм произведения двух положительных чисел равен сумме их логарифмов;*** точнее, если числа a, x и y положительны и $a \neq 1$, то

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y. \tag{1}$$

Для доказательства этого тождества достаточно убедиться в том, что

$$a^{\log_a (xy)} = a^{\log_a x + \log_a y}. \tag{2}$$

(Если степени одного и того же положительного числа, отличного от 1, равны, то равны и показатели этих степеней.) Справедливость формулы (2) установить очень просто, если воспользоваться определением логарифма. Имеем:

$$a^{\log_a (xy)} = xy,$$

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = x \cdot y.$$

Отсюда вытекает формула (2), а стало быть, и формула (1).

Примеры.

1) $\log_3 15 = \log_3 (3 \cdot 5) = \log_3 3 + \log_3 5 = 1 + \log_3 5$.
2) $\log_{10} 2 + \log_{10} 5 = \log_{10} (2 \cdot 5) = \log_{10} 10 = 1$.

Если числа x и y отрицательны, то формула (1) теряет смысл. Например, нельзя писать

$$\log_2 [(-8) \cdot (-4)] = \log_2 (-8) + \log_2 (-4),$$

поскольку выражения $\log_2 (-8)$ и $\log_2 (-4)$ вообще не определены (логарифмическая функция $y = \log_2 x$ определена лишь для положительных значений аргумента x).

Теорема 1 справедлива не только для двух, но и для произвольного числа сомножителей, то есть для любого натурального k и любых положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_k$:

$$\log_a (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_k) = \log_a x_1 + \log_a x_2 + \log_a x_3 + \ldots + \log_a x_k.$$

Теорема 2. ***Логарифм частного двух положительных чисел равен разности логарифмов делимого и делителя.***

Другими словами, если числа a, x и y положительны и $a \neq 1$, то

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y. \tag{3}$$

Доказательство. Формула (3), очевидно, равносильна следующей формуле:

$$\log_a \frac{x}{y} + \log_a y = \log_a x, \tag{4}$$

которая получается из (3), если выражение $\log_a y$ перенести из правой части в левую. Поэтому для доказательства формулы (3) достаточно установить формулу (4). А эта формула легко выводится из формулы (1):

$$\log_a \frac{x}{y} + \log_a y = \log_a \left(\frac{x}{y} \cdot y\right) = \log_a x.$$

Примеры.

1) $\log_3 \frac{25}{16} = \log_3 25 - \log_3 16.$

2) $\log_2 1000 - \log_2 125 = \log_2 \frac{1000}{125} = \log_2 8 = 3.$

Следствие из теоремы 2. Поскольку $\log_a 1 = 0$, то

$$\log_a \frac{1}{b} = \log_a 1 - \log_a b = -\log_a b.$$

Таким образом,

$$\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b.$$

Логарифмы двух взаимно обратных чисел по одному и тому же основанию отличаются друг от друга только знаком.

Примеры.

$$\log_3 9 = -\log_3 \frac{1}{9}; \qquad \log_5 \frac{1}{125} = -\log_5 125$$

и т. д.

Упражнения

1400. Вычислить:

1) $\log_6 2 + \log_6 3$;
2) $\log_2 3 + \log_2 \frac{4}{3}$;
3) $\log_3 7 - \log_3 \frac{7}{27}$;
4) $\log_{10} 40 + \log_{10} 25$;
5) $\log_{10} 0{,}18 - \log_{10} 180$;
6) $\log_{12} 4 + \log_{12} 36$;
7) $\log_5 100 - \log_5 4$;
8) $\log_6 4 + \log_6 9$;
9) $\log_6 \frac{1}{18} + \log_6 \frac{1}{12}$;
10) $\log_{0,1} 50 - \log_{0,1} 0{,}5$.

1401. Зная, что $\log_{10} 2 \approx 0{,}3010$, $\log_{10} 3 \approx 0{,}4771$, $\log_{10} 5 \approx 0{,}6990$, найти логарифмы следующих чисел по основанию 10:

$$6; \quad 15; \quad \frac{5}{6}; \quad 20; \quad \frac{1}{30}.$$

1402. Найти $\log_{10} 2$ и $\log_{10} 5$, если известно, что произведение этих логарифмов приближенно равно 0,2104.

1403. Найти $\log_2 (\operatorname{tg} \varphi)$ и $\log_2 (\operatorname{ctg} \varphi)$, если известно, что

$$\log_2 (\sin \varphi) \approx -0{,}1919; \quad \log_2 (\cos \varphi) \approx -0{,}1157.$$

1404. При каких значениях x выполняется равенство

$$\log_3[(x+1)(x-1)] = \log_3(x+1) + \log_3(x-1)?$$

1405. При каких значениях x выполняется равенство

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{x^2+1}{x^2-3x+2} = \log_{\frac{1}{3}} (x^2+1) - \log_{\frac{1}{3}} (x^2-3x+2)?$$

1406. На сколько $\log_2(100a)$ больше $\log_2 \frac{a}{100}$?

1407. Как нужно изменить число, чтобы его логарифм изменил знак на противоположный?

Логарифм степени и корня § 184

Теорема 1. ***Логарифм степени положительного числа равен произведению показателя этой степени на логарифм ее основания.***

Другими словами, если a и x положительны и $a \neq 1$, то для любого действительного числа k

$$\log_a x^k = k \log_a x. \tag{1}$$

Для доказательства этой формулы достаточно показать, что

$$a^{\log_a x^k} = a^{k \log_a x}. \tag{2}$$

Имеем:

$$a^{\log_a x^k} = x^k,$$

$$a^{k \log_a x} = (a^{\log_a x})^k = x^k.$$

Отсюда вытекает справедливость формулы (2), а стало быть, и (1).

Заметим, что если число k является натуральным ($k = n$), то формула (1) является частным случаем формулы

$$\log_a(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n) = \log_a x_1 + \log_a x_2 + \ldots + \log_a x_n,$$

доказанной еще в предыдущем параграфе. Действительно, полагая в этой формуле

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x,$$

получаем:

$$\log_a x^n = n \log_a x.$$

Примеры.

1) $\log_3 25 = \log_3 5^2 = 2 \log_3 5$;

2) $\log_3 2^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \log_3 2$.

При отрицательных значениях x формула (1) теряет смысл. Например, нельзя писать $\log_2(-4)^2 = 2\log_2(-4)$, поскольку

выражение $\log_2(-4)$ не определено. Заметим, что выражение, стоящее в левой части этой формулы, имеет смысл:

$$\log_2(-4)^2 = \log_2 16 = 4.$$

Вообще, если число x отрицательно, то выражение $\log_a x^{2k}$ определено, поскольку $x^{2k} > 0$. Выражение же $\log_a x$ в этом случае не имеет смысла. Поэтому писать

$$\log_a x^{2k} = 2k \log_a x$$

нельзя. Однако можно писать

$$\log_a x^{2k} = 2k \log_a |x|. \qquad (3)$$

Эта формула легко получается из (1), если учесть, что

$$x^{2k} = |x|^{2k}.$$

Например,

$$\log_3(-3)^4 = 4 \log_3 |-3| = 4 \log_3 3 = 4.$$

Теорема 2. ***Логарифм корня из положительного числа равен логарифму подкоренного выражения, деленному на показатель корня.***

Другими словами, если числа a и x положительны, $a \neq 1$ и n — натуральное число, то

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x.$$

Действительно, $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$. Поэтому по теореме 1

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \log_a x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_a x.$$

Примеры.

1) $\log_3 \sqrt{8} = \frac{1}{2} \log_3 8$; 2) $\log_2 \sqrt[5]{27} = \frac{1}{5} \log_2 27$.

Упражнения

1408. Как изменится логарифм числа, если, не изменяя основания:

а) возвести число в квадрат;

б) извлечь из числа квадратный корень?

1409. Как изменится разность $\log_2 a - \log_2 b$, если числа a и b заменить соответственно на:

а) a^3 и b^3; б) $3a$ и $3b$?

1410. Зная, что $\log_{10} 2 \approx 0{,}3010$; $\log_{10} 3 \approx 0{,}4771$, найти логарифмы по основанию 10 чисел:

$$8;\ 9;\ \sqrt[3]{2};\ \sqrt[3]{6};\ 0{,}5;\ \frac{1}{9}.$$

1411. Доказать, что логарифмы последовательных членов геометрической прогрессии образуют арифметическую прогрессию.

1412. Отличаются ли друг от друга функции

$$y = \log_3 x^2 \quad \text{и} \quad y = 2\log_3 x?$$

Построить графики этих функций.

1413. Найти ошибку в следующих преобразованиях:

$$\log_2 \frac{1}{3} = \log_2 \frac{1}{3};$$

$$2\log_2 \frac{1}{3} > \log_2 \frac{1}{3};$$

$$\log_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 > \log_2 \frac{1}{3};$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 > \frac{1}{3};$$

$$\frac{1}{9} > \frac{1}{3}.$$

Переход от одного основания логарифмов к другому § 185

Иногда оказывается полезным от логарифмов по одному основанию (например, a) перейти к логарифмам по другому основанию (например, c). В этом случае пользуются следующей формулой:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}. \tag{1}$$

При этом предполагается, что a, b и c — положительные числа, причем a и c отличны от единицы.

Пусть, например, нам известно, что $\log_{10} 2 \approx 0{,}3010$; $\log_{10} 3 \approx \approx 0{,}4771$. Требуется найти $\log_2 3$. По формуле (1)

$$\log_2 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} \approx \frac{0{,}4771}{0{,}3010} \approx 1{,}58.$$

Для доказательства формулы (1) воспользуемся основным логарифмическим тождеством

$$a^{\log_a b} = b.$$

Если положительные числа равны, то, очевидно, равны и их логарифмы по одному и тому же основанию c. Поэтому

$$\log_c (a^{\log_a b}) = \log_c b.$$

Но по теореме о логарифме степени

$$\log_c (a^{\log_a b}) = \log_a b \cdot \log_c a.$$

Следовательно,

$$\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b,$$

откуда вытекает формула (1).

Если в формуле (1) в качестве c взять b, то получим:

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}.$$

Итак,

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}. \qquad (2)$$

Примеры.

$$\log_{32} 2 = \frac{1}{\log_2 32} = \frac{1}{5};$$

$$\log_{125} 5 = \frac{1}{\log_5 125} = \frac{1}{3}.$$

Упражнения

1414. Зная, что $\log_{10} 2 \approx 0{,}3010$ и $\log_{10} 3 \approx 0{,}4771$, найти:
а) $\log_3 2$; б) $\log_3 8$; в) $\log_3 12$; г) $\log_{12} 3$.

1415. Доказать, что отношения

$$\frac{\log_2 x}{\log_3 x} \text{ и } \frac{\log_x 2}{\log_x 3}$$

не зависят от x.

1416. Доказать неравенства:

а) $\log_2 5 + \log_5 2 > 2$; б) $\log_{\frac{1}{3}} 4 + \log_4 \frac{1}{3} < -2$.

1417. Изменится ли логарифм числа, если это число и основание логарифма возвести в одну и ту же степень?

Логарифмирование и потенцирование § 186

Если некоторое выражение составлено из положительных чисел посредством умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня, то логарифм всего этого выражения легко выразить через логарифмы входящих в него чисел.

Пусть, например,

$$x = \frac{13^2 \sqrt[3]{140}}{\sqrt[5]{67 \cdot 98}}.$$

Тогда по теореме о логарифме дроби

$$\log_a x = \log_a (13^2 \sqrt[3]{140}) - \log_a \sqrt[5]{67 \cdot 98}.$$

Теорема о логарифме произведения дает:

$$\log_a (13^2 \sqrt[3]{140}) = \log_a 13^2 + \log_a \sqrt[3]{140},$$

$$\log_a \sqrt[5]{67 \cdot 98} = \log_a \sqrt[5]{67} + \log_a \sqrt[5]{98}.$$

Теперь, используя теоремы о логарифме степени и корня, получаем:

$$\log_a 13^2 = 2\log_a 13, \qquad \log_a \sqrt[5]{67} = \frac{1}{5}\log_a 67,$$

$$\log_a \sqrt[3]{140} = \frac{1}{3}\log_a 140, \qquad \log_a \sqrt[5]{98} = \frac{1}{5}\log_a 98.$$

Таким образом,

$$\log_a x = 2\log_a 13 + \frac{1}{3}\log_a 140 - \frac{1}{5}\log_a 67 - \frac{1}{5}\log_a 98.$$

Переход от выражения к его логарифму называется *логарифмированием* этого выражения.

Операция, обратная логарифмированию, называется *потенцированием*. Она заключается в том, что по логарифму некоторого выражения восстанавливается само выражение. Поясним это на следующем примере. Пусть

$$\log_a x = 2\log_a 10 - \frac{1}{2}\log_a 7 - 3\log_a 3 + \frac{1}{3}\log_a 19.$$

Прежде всего, используя теоремы о логарифме степени и корня, можно записать:

$$2\log_a 10 = \log_a 10^2 = \log_a 100,$$

$$\frac{1}{2}\log_a 7 = \log_a (7)^{\frac{1}{2}} = \log_a \sqrt{7},$$

$$3\log_a 3 = \log_a 3^3 = \log_a 27,$$

$$\frac{1}{3}\log_a 19 = \log_a (19)^{\frac{1}{3}} = \log_a \sqrt[3]{19}.$$

После этого $\log_a x$ можно записать в виде $\log_a x = \log_a 100 - \log_a \sqrt{7} - \log_a 27 + \log_a \sqrt[3]{19}$. Теперь, используя теоремы о логарифме произведения и частного, получим:

$$\log_a x = (\log_a 100 + \log_a \sqrt[3]{19}) - (\log_a \sqrt{7} + \log_a 27) =$$

$$= \log_a (100 \cdot \sqrt[3]{19}) - \log_a (\sqrt{7} \cdot 27) = \log_a \frac{100\sqrt[3]{19}}{27\sqrt{7}}.$$

Итак,

$$\log_a x = \log_a \frac{100\sqrt[3]{19}}{27\sqrt{7}}.$$

Но если логарифмы двух положительных чисел по одному и тому же основанию равны, то равны и сами эти числа. Поэтому

$$x = \frac{100\sqrt[3]{19}}{27\sqrt{7}}.$$

Упражнения

Прологарифмировать по основанию 10 следующие выражения (№ 1418—1422):

1418. а) $x = 3a^7$; в) $x = a^2\sqrt[7]{ab^5}$;

б) $x = 15a^3b^3c^7$; г) $x = a\sqrt[3]{ab^2}$.

1419. а) $x = \dfrac{a+b}{a-b}\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}$; в) $x = \sqrt[4]{\dfrac{a^3}{b^2}}$;

б) $x = \dfrac{a\sin\varphi}{2b^2c}\sqrt[3]{b^2\operatorname{tg}\varphi}$; г) $x = \left(\sqrt[5]{\dfrac{a}{2b}}\right)^3$.

1420. а) $x = \left(\sqrt{\dfrac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}}\cdot\operatorname{ctg}\varphi\right)^3$;

б) $x = \left(\sqrt[4]{\dfrac{\sin 2\varphi}{\sin^3\varphi}\operatorname{ctg}\varphi}\right)^{\frac{2}{3}}$.

1421. а) $x = \left(\dfrac{\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt{3ab}}\right)^4$; в) $x = \sqrt[6]{\dfrac{5m^3}{\sqrt[3]{\left(\dfrac{m}{n^2}\right)^2}}}$.

б) $x = \sqrt[4]{\dfrac{3}{a^3}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{4}{b^2}}$;

1422. а) $x = \dfrac{3}{4}\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$; в) $x = \dfrac{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b}}}}{b\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a}}}}$.

б) $x = \dfrac{\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}{\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}}}$;

В задачах № 1423—1426 найти x из данных уравнений:

1423.

а) $\log_a x = \log_a 2 + \log_a 3$; в) $\log_a x = 2\log_a 8 - 4\log_a 2$;

б) $\log_a x = \log_a 2 - \log_a 4$; г) $\log_a x = 3\log_a 2 + 2\log_a 2$.

1424. а) $\log_3 x = \dfrac{1}{3}\log_3 8$;

б) $\log_3 x = \dfrac{2}{3}\log_3 8 + \dfrac{1}{2}\log_3 16$;

в) $\log_5 x = \dfrac{2\log_5 3}{5} - \dfrac{\log_5 7}{10}$.

1425. а) $\log_2 x = \log_2 a + n\log_2(a+b) - \dfrac{1}{n}\log_2(a-b)$;

б) $\log_3 x = -\dfrac{1}{2}\log_3 a + \dfrac{1}{4}\left[\log_3 b - \dfrac{2}{3}\log_3 a + \right.$

$\left. + \dfrac{2}{3}\log_3(a-b) - \dfrac{1}{2}\log_3(a+b)\right]$;

в) $\log_5 x = -\log_5(a+b) + \dfrac{2}{5}\left[2\log_5 a + \dfrac{1}{2}\log_5 b - \right.$

$\left. - \dfrac{1}{3}(\log_5 a - \log_5 b) - \log_5 a\right]$.

1426. а) $\log_a x = \frac{2}{3}\log_a \sin\varphi + \frac{1}{3}\log_a \operatorname{tg}\varphi - \frac{2}{3}\log_a \cos\varphi$;

б) $\log_2 x = 1 + \frac{1}{2}\log_2 \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{1}{2}\log_2 \cos\frac{\varphi}{2}$.

Целая и дробная части числа § 187

Целой частью числа a называется наибольшее целое число, не превосходящее a.

Целая часть числа a обозначается $[a]$. Например, $[2{,}3] = 2$; $[0{,}165] = 0$; $[5] = 5$. Целая часть числа $-4{,}7$ равна -5. Ошибочно было бы считать, что $[-4{,}7] = -4$. По определению целая часть числа a не должна превосходить a, но $-4 > -4{,}7$.

Аналогично

$$[-5{,}79] = -6,$$
$$[-0{,}142] = -1,$$
$$[-\pi] = [-3{,}14\ldots] = -4.$$

Разность между числом a и его целой частью $[a]$ называется дробной частью этого числа и обозначается $\{a\}$:

$$\{a\} = a - [a].$$

Например,

$$\{2{,}3\} = 2{,}3 - 2 = 0{,}3;$$
$$\{0{,}165\} = 0{,}165 - 0 = 0{,}165;$$
$$\{-5{,}79\} = -5{,}79 - (-6) = 0{,}21;$$
$$\{-0{,}142\} = -0{,}142 - (-1) = 0{,}858.$$

Очевидно, что целая часть числа a может быть любым целым числом: положительным, отрицательным или нулем. Дробная же часть числа a всегда неотрицательна и меньше 1.

Любое действительное число a можно представить в виде суммы его целой и дробной частей:

$$a = [a] + \{a\}.$$

Например,

$$2{,}3 = 2 + 0{,}3;$$
$$0{,}165 = 0 + 0{,}165;$$
$$-5{,}79 = -6 + 0{,}21;$$
$$-0{,}142 = -1 + 0{,}858.$$

Упражнения

1427. Данные числа представить в виде суммы их целых и дробных частей:

$$2{,}01;\ \pi;\ 5;\ -2{,}37;\ -6{,}07;\ -7;\ -\pi.$$

1428. а) Изменится ли дробная часть числа, если к нему прибавить целое число?

б) Изменится ли целая часть числа, если к нему прибавить правильную дробь?

Десятичные логарифмы и их свойства § 188

За основание логарифмов часто принимают число 10. Логарифмы чисел по основанию 10 называются *десятичными*. Для обозначения десятичных логарифмов обычно используют знак lg, а не log; при этом число 10, указывающее основание, не пишут. Например, вместо $\log_{10}105$ пишут просто: lg 105; вместо $\log_{10}2$ пишут lg 2 и т. д.

Десятичным логарифмам присущи все те свойства, которыми обладают логарифмы при основании, большем 1. Например, десятичные логарифмы определены только для положительных чисел. Десятичные логарифмы чисел, больших 1, положительны, а чисел, меньших 1, отрицательны; из двух положительных чисел большему соответствует и больший десятичный логарифм и т. д. Но, кроме того, десятичные логарифмы обладают и рядом специфических свойств, которыми и объясняется, почему в качестве основания логарифмов удобно выбирать именно число 10.

Прежде чем рассмотреть эти свойства, введем следующее определение.

Целая часть десятичного логарифма числа a называется характеристикой, а дробная — мантиссой этого логарифма.

Характеристика десятичного логарифма числа a обозначается как $[\lg a]$, а мантисса — как $\{\lg a\}$.

Известно, например, что $\lg 2 \approx 0{,}3010$. Поэтому

$$[\lg 2] = 0, \qquad \{\lg 2\} \approx 0{,}3010.$$

Известно* также, что $\lg 543{,}1 \approx 2{,}7349$. Следовательно,

$$[\lg 543{,}1] = 2, \qquad \{\lg 543{,}1\} \approx 0{,}7349.$$

Точно так же из равенства $\lg 0{,}005 \approx -2{,}3010$ заключаем, что

$$[\lg 0{,}005] = -3, \qquad \{\lg 0{,}005\} = 0{,}6990.$$

Теперь перейдем к рассмотрению свойств десятичных логарифмов.

Свойство 1. ***Десятичный логарифм целого положительного числа, изображенного единицей с последующими нулями, есть целое положительное число, равное количеству нулей в записи данного числа.***

---

* В дальнейшем мы научимся находить десятичные логарифмы положительных чисел по таблицам.

Например, $\lg 1000 = 3$,

$$\lg 1\,000\,000 = 6.$$

Вообще, если

$$a = \underbrace{1000 \ldots 0}_{n},$$

то $a = 10^n$ и потому

$$\lg a = \lg 10^n = n \lg 10 = n.$$

Свойство 2. ***Десятичный логарифм положительной десятичной дроби, изображенной единицей с предшествующими нулями, равен — n, где n — число нулей в записи этого числа, считая и нуль целых.***

Например, $\lg 0{,}01 = -2$,

$$\lg 0{,}00001 = -5.$$

Вообще, если $a = \underbrace{0{,}000\ldots01}_{n}$, то $a = 10^{-n}$ и потому

$$\lg a = \lg 10^{-n} = -n \lg 10 = -n.$$

Свойство 3. ***Характеристика десятичного логарифма положительного числа, большего 1, равна количеству цифр в целой части этого числа без одной.***

Примеры. 1) Характеристика логарифма $\lg 75{,}631$ равна 1. Действительно, $10 < 75{,}631 < 100$. Поэтому

$$\lg 10 < \lg 75{,}631 < \lg 100,$$

или

$$1 < \lg 75{,}631 < 2.$$

Значит,

$$\lg 75{,}631 = 1 + \alpha,$$

где α — некоторая правильная положительная дробь. Но тогда

$$[\lg 75{,}631] = 1,$$

что и требовалось доказать.

2) Характеристика логарифма $\lg 5673{,}1$ равна 3.

Действительно,

$$1000 < 5673{,}1 < 10\,000.$$

Поэтому

$$\lg 1000 < \lg 5673{,}1 < \lg 10\,000,$$

или

$$3 < \lg 5673{,}1 < 4.$$

Следовательно,

$$[\lg 5673{,}1] = 3.$$

Вообще, если целая часть положительного числа a, большего единицы, содержит n цифр, то

$$10^{n-1} \leqslant a < 10^n.$$

Поэтому

$$\lg 10^{n-1} \leqslant \lg a < \lg 10^n,$$

или

$$n - 1 \leqslant \lg a < n.$$

Следовательно,

$$[\lg a] = n - 1.$$

Свойство 4. ***Характеристика десятичного логарифма положительной десятичной дроби, меньшей 1, равна $-n$, где n — число нулей в данной десятичной дроби перед первой значащей цифрой, считая и нуль целых.***

Примеры. 1) Характеристика логарифма $\lg 0{,}0015$ равна -3.

Действительно,

$$0{,}001 < 0{,}0015 < 0{,}01.$$

Поэтому

$$\lg 0{,}001 < \lg 0{,}0015 < \lg 0{,}01.$$

или

$$-3 < \lg 0{,}0015 < -2.$$

Значит,

$$\lg 0{,}0015 = -3 + \alpha,$$

где α — некоторая правильная положительная дробь. Но в таком случае

$$[\lg 0{,}0015] = -3.$$

2) Характеристика логарифма $\lg 0{,}6$ равна -1. Действительно,

$$0{,}1 < 0{,}6 < 1.$$

Поэтому

$$\lg 0{,}1 < \lg 0{,}6 < \lg 1,$$

или

$$-1 < \lg 0{,}6 < 0.$$

Следовательно,

$$\lg 0{,}6 = -1 + \alpha,$$

где α — некоторая правильная положительная дробь. Но в таком случае

$$[\lg 0{,}6] = -1.$$

Вообще, если первой значащей цифре правильной десятичной дроби a предшествует n нулей (считая в том числе и нуль целых), то

$$\underbrace{0{,}000\ldots001}_{n} \leqslant a < \underbrace{0{,}00\ldots01}_{n-1}.$$

Поэтому

$$\lg \underbrace{0{,}000\ldots001}_{n} \leqslant \lg a < \lg \underbrace{0{,}00\ldots0{,}1}_{n-1},$$

или

$$-n \leqslant \lg a < -(n-1).$$

Следовательно,

$$[\lg a] = -n.$$

Свойство 5. ***При умножении числа на 10^n десятичный логарифм его увеличивается на n.***

Действительно, по теореме о логарифме произведения

$$\lg (a \cdot 10^n) = \lg a + \lg 10^n = \lg a + n.$$

Например,

$$\lg (579{,}13 \cdot 100) = \lg 579{,}13 + 2;$$
$$\lg (16 \cdot 1000) = \lg 16 + 3.$$

Перенос запятой в положительной десятичной дроби на n знаков вправо равносилен умножению этой дроби на 10^n. Поэтому ***при переносе запятой в положительной десятичной дроби на n знаков вправо десятичный логарифм увеличивается на n.***

Свойство 6. ***При делении числа на 10^n десятичный логарифм уменьшается на n.***

Например, $\lg \frac{1{,}57}{1000} = \lg 1{,}57 - 3;$

$$\lg \frac{0{,}63}{100} = \lg 0{,}63 - 2.$$

При переносе запятой в положительной десятичной дроби на n знаков влево десятичный логарифм уменьшается на n.

Например, $\lg 0{,}3567 = \lg 35{,}67 - 2;$

$$\lg 0{,}00054 = \lg 0{,}54 - 3.$$

Учащимся предлагается самостоятельно доказать эти утверждения.

Все доказанные до сих пор свойства десятичных логарифмов относились к их характеристике. Теперь обратимся к мантиссе десятичных логарифмов.

Свойство 7. ***Мантисса десятичного логарифма положительного числа не изменяется при умножении этого числа на 10^n с любым целым показателем n.***

Действительно, при любом целом n (как положительном, так и отрицательном)

$$\lg (a \cdot 10^n) = \lg a + \lg 10^n = \lg a + n.$$

Но дробная часть числа не изменяется при прибавлении к нему целого числа.

Перенос запятой в десятичной дроби вправо или влево равносилен умножению этой дроби на степень числа 10 с целым показателем n (положительным или отрицательным). Поэтому ***при переносе запятой в положительной десятичной дроби влево или вправо мантисса десятичного логарифма этой дроби не изменяется.***

Например, $\{\lg 0{,}0067\} = \{\lg 0{,}67\} = \{\lg 0{,}0000067\}$.

Упражнения

1429. (Устно.) Найти десятичные логарифмы чисел:
1; 10; 100; 1000; 10 000;
0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; 0,00001.

1430. (Устно.) Найти характеристики десятичных логарифмов чисел:
2,00; 57,38; 632,70; 3402,99;
0,17; 0,99; 0,023; 0,0100; 0,0003.

1431. Известно, что $\lg 2 \approx 0{,}3010$, $\lg 3 \approx 0{,}4771$.
Найдите характеристики и мантиссы следующих логарифмов:
а) $\lg 6$; б) $\lg 15$; в) $\lg 32$; г) $\lg 30$; д) $\lg \frac{1}{12}$.

Таблицы десятичных логарифмов § 189

Для нахождения десятичных логарифмов составлены специальные таблицы. По ним, зная число x, можно с той или иной точностью определить $\lg x$. Мы будем пользоваться «Четырехзначными математическими таблицами» В. М. Брадиса. Они содержат значения десятичных логарифмов с точностью до 0,0001.

В § 188 было показано, что характеристики десятичных логарифмов легко находятся без таблиц. Поэтому в таблицах приведены лишь мантиссы логарифмов. Рассмотрим несколько примеров нахождения логарифмов чисел по таблицам.

1) Логарифмы трехзначных целых чисел

Пусть, например, требуется найти $\lg 456$. Характеристика этого логарифма равна 2. В таблице XIII на страницах 65—67 находим число, стоящее на пересечении строки с пометкой 45 и столбца с пометкой 6. Это число 6590. Оно указывает на то, что мантисса логарифма числа 456 приближенно равна 0,6590. Значит, $\lg 456 \approx 2{,}6590$. Аналогично находим $\lg 238 \approx 2{,}3766$, $\lg 850 \approx \approx 2{,}9294$ и т. д.

2) Логарифмы одно- и двузначных целых чисел

Пусть, например, нужно найти $\lg 5$. Если число умножить на 100, то мантисса его десятичного логарифма не изменится. Поэтому мантисса логарифма однозначного числа 5 равна мантиссе трехзначного числа 500. По таблицам эта мантисса равна 0,6990. Поскольку характеристика логарифма числа 5 равна 0, то $\lg 5 \approx \approx 0{,}6990$. Аналогично найдем $\lg 3 \approx 0{,}4771$ и т. д.

Если нужно найти логарифм числа 13, то для определения его мантиссы достаточно число 13 умножить на 10. Мантисса логарифма числа 130 равна 0,1139. Поскольку характеристика логарифма числа 13 равна 1, то $\lg 13 \approx 1{,}1139$. Аналогично найдем $\lg 75 \approx \approx 1{,}8751$, $\lg 64 \approx 1{,}8062$ и т. д.

3) Логарифмы четырехзначных чисел

Вы, наверное, уже обратили внимание на то, что в правой части таблицы XIII расположены числа, напоминающие поправки

к таблицам тригонометрических функций. Эта часть таблицы содержит поправки на четвертую цифру, что дает возможность вычислять логарифмы четырехзначных чисел. Пусть, например, нужно найти lg 2587. По таблице XIII найдем мантиссу трехзначного числа 258 и прибавим к ней поправку на число 7. В результате мы получим мантиссу логарифма четырехзначного числа 2587. Мантисса lg 258 приближенно равна 0,4116, а поправка на 7 равна 0,0012 (в таблице вместо 0,0012 пишут просто 12). Поэтому мантисса логарифма числа 2587 равна:

$$\begin{array}{r} 0{,}4116 \\ +\ 0{,}0012 \\ \hline 0{,}4128 \end{array}$$

Учитывая, что характеристика этого логарифма равна 3, получаем окончательно $\lg 2587 \approx 3{,}4128$.

Аналогично

$$\begin{array}{rr} \lg 9625 \approx 3.9832 & \lg 7718 \approx 3{,}8871 \\ +\ 0{,}0002 & +\ 0{,}0004 \\ \hline 3{,}9834 & 3{,}8875 \end{array}$$

4) Логарифмы целых чисел, содержащих более четырех цифр

Если целое число содержит более четырех цифр, то его округляют так, чтобы все цифры, начиная с пятой, были нулями. Если при этом пятая цифра меньше 5, то первые четыре цифры не изменяются. Если же пятая цифра больше или равна 5, то четвертую цифру увеличивают на 1.

Например, $573\,528 \approx 573\,500$, $36\,289 \approx 36\,290$, $19\,998 \approx 20\,000$, $7\,425\,538 \approx 7\,426\,000$. Логарифмы исходных чисел приближенно равны логарифмам чисел, полученных в результате округления. Мантиссы логарифмов этих чисел легко найти по таблицам. Например, мантисса логарифма числа 573 500 равна мантиссе логарифма числа 5735 (при делении числа на 100 мантисса его десятичного логарифма не изменяется). По таблицам находим эту мантиссу: 0,7586. Учитывая, что lg 573 528 имеет характеристику 5, получаем: $\lg 573\,528 \approx 5{,}7586$.

Аналогично получаем: мантисса логарифма числа 36 290 равна мантиссе логарифма числа 3629, то есть 0,5598. Поэтому $\lg 36\,289 \approx 4{,}5598$.

5) Логарифмы дробных чисел

Пусть, например, нужно найти lg 803,24. Характеристика этого логарифма равна 2 (целая часть числа 803,24 содержит 3 цифры). Мантисса этого логарифма равна мантиссе логарифма числа 80 324 или приближенно мантиссе логарифма числа 80 320. Из таблиц находим эту мантиссу: 0,9048. Значит, $\lg 803{,}24 \approx 2{,}9048$. Аналогично характеристика логарифма 0,0053 равна —3

(дробь 0,0053 перед первой значащей цифрой имеет три нуля, включая нуль целых). Мантисса этого логарифма равна мантиссе логарифма числа 530. Из таблиц находим эту мантиссу: 0,7243. Следовательно, $\lg 0{,}0053 \approx -3 + 0{,}7243 = -2{,}2757$.

Упражнения

1432. Используя таблицы В. М. Брадиса, найти десятичные логарифмы следующих чисел:

257; 301; 25; 99; 2; 3; 3796; 9999; 10 325;

267 398; 37 990 653; 263,56; 35,074; 2,9345; 0,002863; 0,000056.

1433. Используя таблицы В. М. Брадиса, вычислить:

$$\log_3 5; \qquad \log_9 17; \qquad \log_{0{,}05} 0{,}004.$$

Таблицы антилогарифмов § 190

По таблице XIII можно находить не только логарифмы чисел, но и числа по их логарифмам. Однако еще проще эта задача решается с помощью таблицы XIV (см. таблицы В. М. Брадиса, стр. 68—70). Рассмотрим несколько примеров.

1) Найти число, логарифм которого равен 2,345. Не обращая внимания на характеристику 2 этого логарифма, найдем число, мантисса логарифма которого равна 0,345. Для этого в таблице XIV отыскиваем строку с пометкой 34 и столбец с пометкой 5. На их пересечении стоит число 2213. Это и есть (приближенно) значащая часть искомого числа. Поскольку характеристика логарифма равна 2, то целая часть искомого числа содержит три цифры. Значит, искомое число приближенно равно 221,3.

2) Решить уравнение $\lg x = 0{,}7823$. В таблице XIV отыскиваем число, стоящее на пересечении строки с пометкой 78 и столбца с пометкой 2. Им оказывается число 6053. К нему прибавляем поправку на 3, равную 4. В результате получаем 6057. Это и есть значащая часть числа. Поскольку характеристика логарифма числа x равна 0, целая часть числа x содержит одну цифру. Поэтому $x \approx 6{,}057$.

3) Найти число, логарифм которого равен — 3,0576. Прежде всего найдем характеристику и мантиссу этого логарифма: $-3{,}0576 = -4 + 0{,}9424$. Следовательно, характеристика равна —4, а мантисса 0,9424. Такой логарифм принято записывать в виде $\overline{4}{,}9424$. Черта над цифрой 4 указывает, что характеристика логарифма равна —4, а не 4. Теперь, не обращая внимания на характеристику $\overline{4}$, найдем число, соответствующее мантиссе 0,9424. Это число 8758. Поскольку характеристика логарифма искомого числа равна —4, то это искомое число записывается в виде десятичной дроби с четырьмя нулями перед первой значащей цифрой: 0,0008758.

Упражнение

1434. Пользуясь таблицей антилогарифмов, решить следующие уравнения:

а) $\lg x = 0{,}3625$;
б) $\lg x = 4{,}0002$;
в) $\lg x = -0{,}3928$;
г) $\lg x = -2{,}5440$;
д) $\lg x = -3{,}0257$;
е) $\lg x = -1{,}9994$.

Таблицы десятичных логарифмов тригонометрических функций § 191

Логарифмы синусов малых углов (от 0° до 14°) приведены В. М. Брадисом в таблице XV на страницах 71—72. Например, чтобы найти

$$\lg \sin 8°47',$$

отыскиваем в этой таблице строку с левой пометкой 8°40′ и столбец с верхней пометкой 7′. На их пересечении стоит число $\overline{1},1838$ (характеристика $\overline{1}$ указана выше на пересечении строки с пометкой 8°00′ и столбца с пометкой 0′). Значит, $\lg \sin 8°47' \approx \overline{1},1838$ (или $-1 + 0{,}1838 = -0{,}8162$).

По таблице XV можно находить и логарифмы косинусов углов от 76° до 90°. Пусть, например, нужно найти $\lg \cos 77°34'$; на пересечении строки с правой пометкой 77°30′ и столбца с нижней пометкой 4′ стоит число $\overline{1},3331$. Значит,

$$\lg \cos 77°34' \approx \overline{1},3331 \text{ (или } -0{,}6669).$$

Для нахождения логарифмов синусов углов от 14° до 90°, а также косинусов углов от 0° до 76° нужно пользоваться таблицей XVI, приведенной В. М. Брадисом на страницах 73—74. Здесь углы чередуются через каждые 6′. Поэтому иногда приходится учитывать поправки. Правило учета поправок таково: ***если данный угол больше угла, приведенного в таблице, то поправка прибавляется для синуса и отнимается для косинуса; если же данный угол меньше угла, приведенного в таблице, то, наоборот, поправка прибавляется для косинуса и отнимается для синуса.***

Примеры. 1) Найти $\lg \sin 43°36'$. В таблице XVI на пересечении строки с левой пометкой 43° и верхней пометкой 36′ стоит число $\overline{1},8386$. Значит, $\lg \sin 43°36' \approx \overline{1},8386$ (или $-0{,}1614$).

2) Найти $\lg \sin 65°32'$. На пересечении строки с левой пометкой 65° и верхней пометкой 30′ (стр. 74) стоит число $\overline{1},9590$. К этому числу нужно прибавить 1 — поправку на 2′. В результате получим: $\lg \sin 65°32' \approx \overline{1},9591$ (или $-0{,}0409$).

3) Найти $\lg \cos 11°54'$. На пересечении строки с правой пометкой 11° и нижней пометкой 54′ стоит число $\overline{1},9906$. Поэтому $\lg \cos 11°54' \approx \overline{1},9906$ (или $-0{,}0094$).

4) Найти $\lg\cos 51°20'$. Сначала находим $\lg\cos 51°18'$, а затем отнимаем от него поправку на 2′; $\lg\cos 51°18' \approx \overline{1},7960$; поправка на 2′ равна 3. Поэтому $\lg\cos 51°20' \approx \overline{1},7957$ (или $-0,2043$).

Логарифмы тангенсов углов от 0° до 14° (а также котангенсов углов от 76° до 90°) приведены в таблице XVII на страницах 75—76. Логарифмы тангенсов и котангенсов углов от 14° до 76° находятся по таблице XVIII (стр. 77—78). Логарифмы тангенсов углов от 76° до 90°, а также котангенсов углов от 0° до 14° содержатся в таблице XIX (стр. 79—80). Устройство этих трех таблиц вполне аналогично устройству описанных выше таблиц XV и XVI. Поэтому подробно на них мы останавливаться не будем. Отметим только, что поправки учитываются для логарифмов тангенсов углов так же, как и для логарифмов синусов углов, а для логарифмов котангенсов углов — так же, как и для логарифмов косинусов углов.

Упражнения

1435. Пользуясь таблицами логарифмов тригонометрических функций, найти десятичные логарифмы следующих величин:

а) $\sin 12°17'$; $\sin 3°29'$; $\cos 77°47'$; $\cos 88°19'$;

б) $\sin 48°38'$; $\sin 60°46'$; $\sin 85°57'$;
$\cos 4°34'$; $\cos 49°52'$; $\cos 74°33'$;

в) $\operatorname{tg} 3°49'$; $\operatorname{tg} 13°23'$; $\operatorname{ctg} 80°29'$; $\operatorname{ctg} 89°35'$;

г) $\operatorname{tg} 45°38'$; $\operatorname{tg} 67°10'$; $\operatorname{tg} 74°39'$; $\operatorname{ctg} 31°2'$;
$\operatorname{ctg} 56°46'$; $\operatorname{ctg} 71°27'$;

д) $\operatorname{tg} 83°39'$; $\operatorname{tg} 89°29'$; $\operatorname{ctg} 0°17'$; $\operatorname{ctg} 9°36'$.

1436. Дать обоснование правила учета поправок при нахождении по таблицам логарифмов тригонометрических функций.

Действия над логарифмами § 192

Сложение логарифмов в особом пояснении не нуждается. Поэтому мы ограничимся лишь приведением двух примеров:

$3,0607$	$\overline{4},0380$
$+\overline{1},8701$	$+\overline{5},9927$
$\overline{3},0056$	$2,0449$
$\overline{1},9364$	$\overline{6},0756$

Вычитание логарифмов целесообразно сводить к сложению. Для этого логарифмы, перед которыми стоит знак —, преобразуют так, чтобы этот знак сменился на знак +. Например,

$$-7,5604 = -8 + 0,4396 = \overline{8},4396;$$
$$-\overline{5},2967 = 5 - 0,2967 = 4,7033.$$

Так, выражение $\overline{2},0073 - 7,5604 - \overline{5},2967$ преобразуется в сумму:

$$\begin{array}{r} \overline{2},0073 \\ +\overline{8},4396 \\ 4,7033 \\ \hline \overline{5},1502 \end{array}$$

Умножение логарифма на число. Сначала умножаем на число характеристику, а затем мантиссу логарифма и полученные результаты складываем. Например,

$$\overline{5},6315 \cdot 4 = -20 + 2,5260 = \overline{18},5260;$$

$$\overline{2},0501 \cdot \frac{3}{2} \approx -3 + 0,0751 = \overline{3},0751;$$

$$\overline{3},7500 \cdot (-0,5) = 1,5 - 0,3750 = 1,1250.$$

Деление логарифма на число. Если характеристика логарифма неотрицательна, то деление его на число производится обычным способом. Например, $8,024 : 4 = 2,006$. Если же характеристика отрицательна, то возможны два случая.

1) Отрицательная характеристика делится на делитель без остатка. В этом случае характеристику и мантиссу делим на делитель отдельно. Например,

$$\overline{15},6305 : 5 = \overline{3},1261.$$

2) Отрицательная характеристика не делится на делитель без остатка. Тогда прибавляем к ней столько отрицательных единиц, чтобы полученное число делилось на делитель без остатка; к мантиссе прибавляем столько же положительных единиц. Например,

$$\overline{2},5608 : 4 = (-4 + 2,5608) : 4 = \overline{1},6402.$$

Мы рассмотрели случаи, когда делитель есть целое число. Если это не так, то предварительно логарифмы нужно представить в обычном виде. Например,

$$\overline{4},7102 : 2,3546 = -3,2898 : 2,3546 \approx -1,3971 = \overline{2},6029.$$

Деление логарифма на отрицательное число сводится к делению на положительное число. Например,

$$\overline{3},6409 : (-4) = -(\overline{3},6409 : 4) \approx -(\overline{1},4102) = 1 - 0,4102 = 0,5898.$$

Упражнения

1437. Выполнить указанные действия над логарифмами:

а) $\overline{1},4792 + \overline{1},5706 + 3,0056$;

б) $\overline{5},0032 + 2,7368 + \overline{3},9263$;

в) $0,9329 - \overline{1},2605 - \overline{5},0060$;

г) $\overline{2},4645 - \overline{4},3839 + \overline{6},0092 - \overline{5},3973$;

д) $\overline{1},2396 - 0,5974 - \overline{2},9328$.

Вычислить с точностью до 0,0001 (№ 1438, 1439):

1438. а) $\overline{2},0296 \cdot 0,36$; г) $\overline{1},0256 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$;

б) $\overline{3},1728 \cdot 5$; д) $\overline{4},4437 \cdot (-0,2)$.

в) $\overline{7},2894 \cdot 9,8$;

1439. а) $\overline{2},6302 : 7$; б) $\overline{3},0280 : \frac{2}{5}$; в) $\overline{5},2709 : \left(-\frac{4}{3}\right)$.

Примеры вычисления с помощью таблиц логарифмов § 193

Пример 1. Пусть нужно вычислить

$$x = \frac{0,475^2 \sqrt[3]{\sin^2 38°22'}}{\operatorname{tg} 85°13' \sqrt[5]{239,3}}.$$

Логарифмируя это выражение, получаем:

$$\lg x = 2 \lg 0,475 + \frac{2}{3} \lg \sin 38°22' - \lg \operatorname{tg} 85°13' - \frac{1}{5} \lg 239,3.$$

По таблицам логарифмов находим:

$\lg 0,475 \approx \overline{1},6767$; $\lg \sin 38°22' \approx \overline{1},7929$;

$\lg 239,3 \approx 2,3790$; $\lg \operatorname{tg} 85°13' \approx 1,0774$.

Поэтому

$$2 \lg 0,475 \approx \overline{2} + 1,3534 = \overline{1},3534;$$

$$-\frac{1}{5} \lg 239,3 \approx -0,4758 = \overline{1},5242;$$

$$\frac{2}{3} \lg \sin 38°22' \approx \frac{2 \cdot \overline{1},7929}{3} = \frac{\overline{1},5858}{3} \approx \overline{1},8619;$$

$$-\lg \operatorname{tg} 85°13' \approx -1,0774 = \overline{2},9226.$$

Следовательно,

$$\begin{array}{r} \overline{1},3534 \\ \overline{1},5242 \\ \overline{1},8619 \\ \overline{2},9226 \\ \hline \lg x \approx \overline{3},6621. \end{array}$$

Итак, $\lg x \approx \overline{3},6621$. Отсюда, используя таблицу антилогарифмов, получаем:

$$x \approx 0,004593.$$

Пример 2. Вычислить

$$x = \sqrt[5]{\sqrt[4]{35} - \sqrt[6]{30}}.$$

Сплошное логарифмирование здесь невозможно, поскольку под знаком корня 5-й степени стоит разность. В подобных случаях вычисления ведут по частям: сначала находят $\sqrt[4]{35}$, потом $\sqrt[6]{30}$, затем их разность и, наконец, корень 5-й степени из этой разности.

$$\lg \sqrt[4]{35} = \frac{1}{4} \lg 35 \approx \frac{1}{4} \cdot 1{,}5441 \approx 0{,}3860,$$

$$\sqrt[4]{35} \approx 2{,}432,$$

$$\lg \sqrt[6]{30} = \frac{1}{6} \lg 30 \approx \frac{1}{6} \cdot 1{,}4771 \approx 0{,}2462,$$

$$\sqrt[6]{30} \approx 1{,}763,$$

$$\sqrt[4]{35} - \sqrt[6]{30} \approx 2{,}432 - 1{,}763 = 0{,}669,$$

$$\lg \sqrt[5]{\sqrt[4]{35} - \sqrt[6]{30}} \approx \lg \sqrt[5]{0{,}669} = \frac{1}{5} \lg 0{,}669 \approx \frac{1}{5} \cdot \bar{1}{,}8254 \approx$$

$$\approx \bar{1}{,}9651,$$

$$\sqrt[5]{\sqrt[4]{35} - \sqrt[6]{30}} \approx 0{,}9228.$$

Упражнения

Вычислить с помощью таблиц логарифмов (№ 1440—1446):

1440. $\dfrac{12{,}48^3 \sqrt[4]{5{,}76}}{\sqrt[3]{673{,}8} \cdot 1{,}842}$.

1441. $\sqrt[6]{\dfrac{2{,}591^4 \sqrt[3]{0{,}0836}}{1{,}147^2}}$.

1442. $\dfrac{3{,}89^{-2} \sqrt[3]{-0{,}1536}}{0{,}924^2}$.

1443. $\dfrac{\sqrt[3]{\sin 32°14'} \cdot 26{,}73^2}{\sqrt{13{,}65} \cdot \operatorname{ctg} 29°18'}$.

1444. $\dfrac{\cos 75°28' \sqrt[5]{0{,}5}}{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 70°16'} \cdot \sin \frac{\pi}{9}}$.

1445. $\sqrt[3]{5\sqrt[5]{2} + \sqrt[5]{3} - 2\sqrt[5]{5}}$.

1446. $\sqrt[7]{\sqrt[5]{\cos 16°32'} + \sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{2\pi}{13}}}$.

1447. Найти площадь треугольника со сторонами 67,28 *см*, 36,54 *см* и 59,02 *см*.

1448. Найти площадь треугольника со сторонами 238,4 *см* и 79,3 *см*, если угол между этими сторонами равен 37°23′.

Натуральные логарифмы § 194

Десятичные логарифмы для наших потребностей являются весьма удобными. Однако при изучении высшей математики более удобными оказываются логарифмы по основанию $e = 2{,}718281828...$ (см. § 134, ч. 1). Употребление

этих логарифмов позволяет значительно упростить большое количество математических формул. Логарифмы по основанию e получаются при решении многих физических задач и естественным образом входят в математическое описание некоторых химических, биологических и других процессов. Этим и объясняется их название «натуральные логарифмы».

Натуральный логарифм числа a обозначается $\ln a$. Сейчас имеются достаточно полные таблицы натуральных логарифмов.

Обоснование действий на логарифмической линейке § 195

Известные нам свойства логарифмов позволяют довольно просто обосновать правила действий, выполняемых с помощью логарифмической линейки. В этом параграфе мы рассмотрим два простейших действия — умножение и деление. Предварительно покажем, как с помощью двух простых линеек можно производить сложение и вычитание чисел.

Каждую из двух одинаковых по длине линеек AB и CD разобьем на 20 равных частей и отметим эти части на линейке AB у верхнего края, а на линейке CD у нижнего края (рис. 254).

Пусть к числу 11 нужно прибавить число 5. Отметку 0 на линейке CD установим над отметкой 11 линейки AB (рис. 255). Тогда под отметкой 5 на шкале CD будет находиться отметка 16 на шкале AB. Эта отметка и показывает сумму чисел 11 и 5.

Теперь предположим, что от 18 нужно отнять 6. Над отметкой 18 на шкале AB установим отметку 6 на шкале CD (рис. 256).

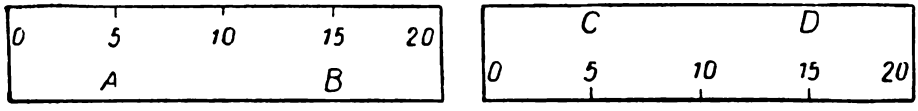

Рис. 254.

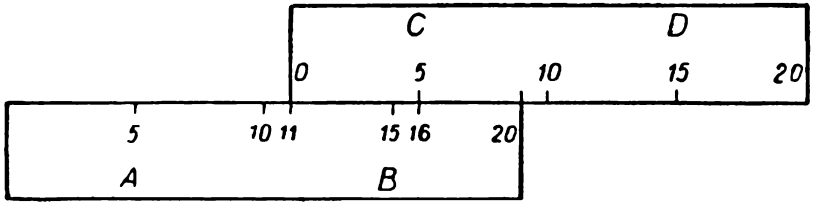

Рис. 255.

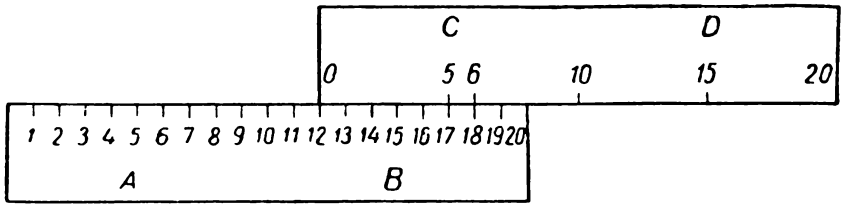

Рис. 256.

Тогда под отметкой 0 на шкале CD будет находиться отметка 12 на шкале AB. Эта отметка и показывает разность чисел 18 и 6.

На этом простом принципе основано устройство логарифмической линейки. Только здесь отметки изображают не числа, а их логарифмы. Как известно, сумма логарифмов двух положительных чисел равна логарифму их произведения:

$$\lg a + \lg b = \lg (ab),$$

а разность логарифмов двух положительных чисел — логарифму их частного:

$$\lg a - \lg b = \lg \frac{a}{b}.$$

Поэтому если на линейках отмечать не сами числа, а их логарифмы, то с помощью двух таких линеек (или шкал) можно будет легко производить умножение и деление чисел.

Примем длину линейки за единицу. Цифрой 1 отметим на ней точку, соответствующую числу $\lg 1 = 0$; цифрой 2 — точку, соответствующую числу $\lg 2 \approx 0{,}3010$; цифрой 3 — точку, соответствующую числу $\lg 3 \approx 0{,}4771$, и т. д. (рис. 257). Правая крайняя точка будет при этом отмечена числом 10, что соответствует числу $\lg 10 = 1$. В результате мы получим шкалу, которая называется *логарифмической шкалой*. С помощью двух таких шкал можно производить умножение и деление чисел.

Пусть, например, нужно умножить 2 на 4. Отметку 1 на шкале CD устанавливаем над отметкой 2 на шкале AB (рис. 258). Под отметкой 4 на шкале CD читаем отметку 8 на шкале AB. Эта отметка и показывает произведение чисел 2 и 4.

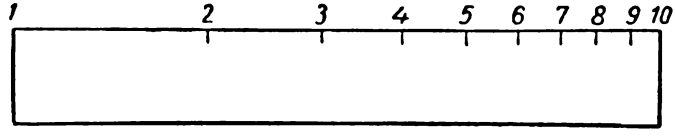

Рис. 257.

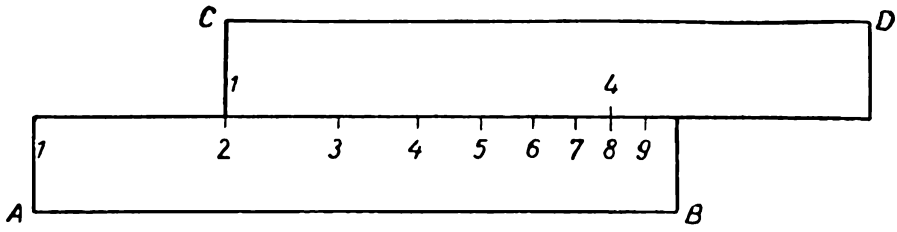

Рис. 258.

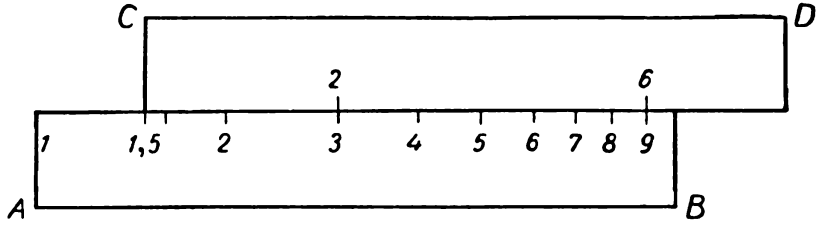

Рис. 259.

Аналогично производится деление. Пусть 9 нужно разделить на 6. Отметку 6 на шкале CD устанавливаем над отметкой 9 на шкале AB (рис. 259). Под отметкой 1 на шкале CD стоит отметка 1,5 на шкале AB. Эта отметка и дает отношение $\frac{9}{6}$.

Основные способы решения показательных уравнений § 196

Показательными уравнениями называются уравнения, содержащие неизвестную величину в показателе степени.

К таким относятся, например, уравнения $3^x = 2^{x-1}$; $5^{x^2-6}-1 = 0$ и другие.

Показательные уравнения, так же как и тригонометрические, в отличие от алгебраических (например, линейных, квадратных), относятся к *трансцендентным* уравнениям.

Простейшим показательным уравнением является уравнение

$$a^x = b, \qquad (1)$$

где a и b — данные положительные числа ($a \neq 1$), а x — неизвестная величина. Такое уравнение имеет единственный корень $x = \log_a b$. Более сложные показательные уравнения часто сводятся либо к алгебраическим уравнениям, либо к уравнениям вида (1).

Рассмотрим основные способы решения показательных уравнений на частных примерах.

I. Решить уравнение

$$5^{x-6} = 5^{15-2x}.$$

Решение подобных уравнений основано на следующем свойстве степеней: если две степени одного и того же положительного числа, отличного от 1, равны, то равны и их показатели. В данном случае это свойство степеней дает:

$$x - 6 = 15 - 2x,$$

откуда $x = 7$.

Проверка. При $x = 7$ $5^{x-6} = 5$, $5^{15-2x} = 5$. Значит, $x = 7$ — корень данного уравнения.

Ответ. $x = 7$.

Аналогично решается уравнение

$$49^x = \left(\frac{1}{7}\right)^{x^2}.$$

Действительно, $49^x = (7^2)^x = 7^{2x}$; $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2} = (7^{-1})^{x^2} = 7^{-x^2}$. Поэтому $7^{2x} = 7^{-x^2}$, откуда $2x = -x^2$, или $x_1 = 0$, $x_2 = -2$. Проверка показывает, что оба эти значения x удовлетворяют данному уравнению.

Ответ. $x_1 = 0$; $x_2 = -2$.

По этому же принципу можно решать и показательное уравнение $a^x = b$, если b есть целая степень числа a. Например, если $3^x = 27$, то, представив 27 в виде $27 = 3^3$, получаем $3^x = 3^3$, откуда $x = 3$.

II. Иногда путем введения новой неизвестной величины показательное уравнение сводится к алгебраическому уравнению. Пусть, например, нужно решить уравнение

$$4^x + 2^x - 6 = 0.$$

Обозначим 2^x через y. Тогда $4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = (2^x)^2 = y^2$. Поэтому данное уравнение сводится к квадратному уравнению

$$y^2 + y - 6 = 0,$$

из которого получаем: $y_1 = 2$, $y_2 = -3$. Но $y = 2^x$. Значит, если только данное уравнение имеет корни, то они должны удовлетворять либо уравнению $2^x = 2$, либо уравнению $2^x = -3$. Первое из этих уравнений имеет корень $x = 1$; второе же уравнение корней не имеет, поскольку выражение 2^x не может принимать отрицательных значений. Итак, мы получили: $x = 1$.

Проверка. При $x = 1$

$$4^x + 2^x - 6 = 4^1 + 2^1 - 6 = 0.$$

Следовательно, $x = 1$ — корень данного уравнения.

Ответ. $x = 1$.

III. Решить уравнение

$$2^x = 3^x.$$

Разделив обе части данного уравнения на 3^x (такое деление возможно, поскольку при любом x $3^x > 0$), получим: $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$.

Но $1 = \left(\frac{2}{3}\right)^0$, поэтому $x = 0$. Проверка показывает, что это действительно корень данного уравнения.

Ответ. $x = 0$.

Аналогично решается уравнение $5^{2x} = 7^{3x}$.

Действительно, $5^{2x} = (5^2)^x = 25^x$; $7^{3x} = (7^3)^x = 343^x$. Поэтому данное уравнение можно переписать в виде

$$25^x = 343^x.$$

Отсюда, так же как и в предыдущем случае, получаем: $x = 0$.

Упражнения

Решить уравнения (№ 1449—1454):

1449. а) $5^x = 125$; б) $4^x = 64$; в) $3^x = \frac{1}{81}$; г) $25^x = \frac{1}{5}$; д) $2^{x+3} = 32$; е) $8^x = 16$; ж) $9^{-x} = 27$; з) $\sqrt{3^x} = \sqrt[3]{9}$; и) $\sqrt[4]{7^x} = \sqrt[5]{343}$; к) $\sqrt{2^x} \cdot \sqrt{3^x} = 36$.

1450. а) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^4$; б) $\left(\frac{4}{9}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^5$; в) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$; г) $2^{x^2-6x-2,5} = 16\sqrt{2}$; д) $a^{(x-2)(x-3)} = 1$ $(a > 0)$; е) $5^2 \cdot 5^4 \cdot 5^6 \ldots . 5^{2x} = 0{,}04^{-28}$.

1451. а) $3^x + 3^{x+1} = 108$; б) $7^x - 7^{x-1} = 6$; в) $5^{x+1} - 5^{x-1} = 24$; г) $3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} = 13$; д) $7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x-1} = 347$; е) $5^{x+1} + 3 \cdot 5^{x-1} - 6 \cdot 5^x + 10 = 0$.

1452. а) $2^{5-x} = 2^{3x-3}$; б) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$; в) $5^x \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3} = \left(\frac{1}{125}\right)^x$; г) $2^x \cdot 5^x = 0{,}1 \cdot (10^{x-1})^5$; д) $\sqrt[x]{\sqrt[3]{4^{x+1}}} = \sqrt[3]{\sqrt[x]{(0{,}5)^{2-4x}}}$; е) $(0{,}25)^{2-x} = \frac{256}{2^{x+3}}$; ж) $\sqrt{27^{x-1}} = \sqrt[3]{9^{2-x}}$; з) $\sqrt[4]{a^{x+1}} = \sqrt[5]{a^{x-2}}$ $(a > 0)$; и) $4^{\sqrt{x+1}} = 64 \cdot 2^{\sqrt{x+1}}$; к) $16\sqrt{(0{,}25)^{5-\frac{x}{4}}} = 2^{\sqrt{x+1}}$.

1453. а) $5^{2x} - 5^x - 600 = 0$; б) $9^x - 3^x - 6 = 0$; в) $4^x + 2^{x+1} = 80$; г) $3^x + 9^{x-1} - 810 = 0$; д) $3^{2\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 3 = 0$; е) $4 + \frac{2}{3^x - 1} = \frac{5}{3^{x-1}}$;

ж) $\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1}+\left(\frac{3}{5}\right)^{1-x}=1{,}2$; з) $9^x+6^x=4^x$.

1454. а) $11^x=17^x$; г) $5^{2x}-7^x-5^{2x}\cdot 17+7^x\cdot 17=0$;

б) $9^x=\left(\frac{1}{243}\right)^{5x}$; д) $3\cdot 2^x=2\cdot 3^x$;

в) $13^x=19^{-4x}$; е) $7\cdot 2^x=5\cdot 3^x$;

ж) $a^x=b^x$ $(a>0,\ b>0)$.

Решить системы уравнений:

1455. $\begin{cases}3\cdot 2^x+2\cdot 3^y=\frac{11}{4},\\ 2^x-3^y=-\frac{3}{4}.\end{cases}$ **1458.** $\begin{cases}5^x-5^y=100,\\ 5^{x-1}+5^{y-1}=20.\end{cases}$

1456. $\begin{cases}2^x\cdot 3^y=648,\\ 3^x\cdot 2^y=432.\end{cases}$ **1459.** $\begin{cases}\sqrt[x-1]{49}=\sqrt[y-1]{343},\\ 3^y=9^{2x-y}.\end{cases}$

1457. $\begin{cases}2^x+3^y=8\frac{1}{9},\\ 2^x\cdot 3^y=\frac{8}{9}.\end{cases}$

Основные способы решения логарифмических уравнений § 197

Логарифмическими уравнениями называются уравнения, содержащие неизвестные величины под знаком логарифма.

К таким относятся, например, уравнения

$$\log_2 x=5,\qquad \log_x(x-1)=0$$

и т. д. Так же как и показательные, логарифмические уравнения являются *трансцендентными*.

Простейшим логарифмическим уравнением является уравнение

$$\log_a x=b, \tag{1}$$

где a и b — данные числа, а x — неизвестная величина. Если a — положительное и не равное единице число, то такое уравнение имеет единственный корень

$$x=a^b.$$

Решение более сложных логарифмических уравнений, как правило, сводится либо к решению алгебраических уравнений, либо к решению уравнений вида (1). Поясним это на некоторых частных примерах.

I. Решить уравнение

$$\log_x(x^2-3x+6)=2.$$

По определению логарифма из этого уравнения следует, что $x^2=x^2-3x+6$, откуда $x=2$.

Проверка. При $x = 2$

$$\log_x (x^2 - 3x + 6) = \log_2 (4 - 6 + 6) = \log_2 4 = 2.$$

Значит, $x = 2$ — корень данного уравнения.

Ответ. $x = 2$.

II. Решить уравнение

$$\lg (x^2 - 17) = \lg (x + 3).$$

Решение подобных уравнений основано на следующем свойстве логарифмов: если логарифмы двух чисел по одному и тому же основанию равны, то равны и сами эти числа. Из этого свойства логарифмов вытекает, что если только данное уравнение имеет корни, то они должны удовлетворять уравнению

$$x^2 - 17 = x + 3,$$

откуда

$$x_1 = 5, \quad x_2 = -4.$$

Проверка. При $x = 5$

$$\lg (x^2 - 17) = \lg 8; \quad \lg (x + 3) = \lg 8.$$

Значит, $x = 5$ — корень данного уравнения. При $x = -4$ левая и правая части данного уравнения не определены, поскольку $x^2 - 17 = -1 < 0$ и $x + 3 = -1 < 0$. Следовательно, $x = -4$ не есть корень этого уравнения.

Ответ. $x = 5$.

Рассмотрим еще одно уравнение

$$2 \lg (x - 1) = \frac{1}{2} \lg x^5 - \lg \sqrt{x}. \tag{2}$$

Выполним следующие преобразования:

$$2\lg (x - 1) = \lg (x - 1)^2,$$

$$\frac{1}{2} \lg x^5 - \lg \sqrt{x} = \lg x^{\frac{5}{2}} - \lg x^{\frac{1}{2}} = \lg \frac{x^{\frac{5}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} = \lg x^2.$$

Таким образом, исходя из уравнения (2), мы пришли к уравнению

$$\lg (x - 1)^2 = \lg x^2. \tag{3}$$

Из него вытекает, что $(x - 1)^2 = x^2$, или $x = \frac{1}{2}$. Но при $x = \frac{1}{2}$ левая часть уравнения (2) не определена $\left(x - 1 = -\frac{1}{2} < 0\right)$; следовательно, данное уравнение не имеет корней.

Заметим, однако, что для уравнения (3) число $\frac{1}{2}$ является корнем. Таким образом, уравнения (2) и (3) не эквивалентны друг другу. Это лишний раз говорит о том, что при решении лога-

рифмических уравнений необходимо делать проверку полученных значений. Среди них часто оказываются «посторонние» корни.

III. Некоторые логарифмические уравнения сводятся к алгебраическим уравнениям посредством введения новой неизвестной величины. Если, например, в уравнении

$$\log_3^2 x - 3\log_3 x - 10 = 0$$

$\log_3 x$ обозначить через y, то оно сведется к квадратному уравнению $y^2 - 3y - 10 = 0$, откуда $y_1 = -2$, $y_2 = 5$. Вспоминая, что $y = \log_3 x$, получаем: если $\log_3 x = -2$, то $x = \frac{1}{9}$; если же $\log_3 x = 5$, то $x = 243$.

Проверкой легко установить, что оба эти значения x удовлетворяют данному уравнению.

Ответ. $x_1 = \frac{1}{9}$; $x_2 = 243$.

IV. Некоторые уравнения решаются путем почленного логарифмирования. Пусть, например, дано уравнение

$$x^{\lg x - 1} = 100.$$

Прологарифмируем это уравнение почленно:

$$\lg x^{\lg x - 1} = \lg 100,$$
$$(\lg x - 1)\lg x = 2.$$

Обозначая $\lg x$ буквой y, мы приходим к квадратному уравнению

$$y^2 - y - 2 = 0,$$

имеющему корни $y_1 = -1$, $y_2 = 2$. Вспоминая, что $y = \lg x$, получаем: либо $\lg x = -1$, и тогда $x = 0{,}1$; либо $\lg x = 2$, и тогда $x = 100$.

Проверка. При $x = 0{,}1$

$$x^{\lg x - 1} = 0{,}1^{-1-1} = 0{,}1^{-2} = \frac{1}{0{,}01} = 100;$$

следовательно, $x = 0{,}1$ — корень данного уравнения. При $x = 100$

$$x^{\lg x - 1} = 100^{2-1} = 100;$$

так что $x = 100$ — также корень уравнения.

Ответ. $x_1 = 0{,}1$; $x_2 = 100$.

V. При решении некоторых логарифмических уравнений оказывается полезным использовать формулу перехода от одного основания логарифмов к другому:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Решим, например, уравнение

$$\log_2 x + \log_3 x = 1.$$

Для этого от логарифмов по основаниям 2 и 3 перейдем к логарифмам по основанию 10:

$$\log_2 x = \frac{\lg x}{\lg 2}, \quad \log_3 x = \frac{\lg x}{\lg 3}.$$

Тогда данное уравнение примет вид:

$$\frac{\lg x}{\lg 2} + \frac{\lg x}{\lg 3} = 1,$$

откуда

$$\lg x = \frac{\lg 2 \cdot \lg 3}{\lg 2 + \lg 3} = \frac{\lg 2 \cdot \lg 3}{\lg 6}.$$

Поэтому

$$x = 10^{\frac{\lg 2 \cdot \lg 3}{\lg 6}} = (10^{\lg 2})^{\frac{\lg 3}{\lg 6}} = 2^{\frac{\lg 3}{\lg 6}}.$$

При необходимости это значение x можно определить с помощью таблиц логарифмов.

Проверка. При найденном значении x

$$\log_2 x = \frac{\lg x}{\lg 2} = \frac{1}{\lg 2} \cdot \lg\left(10^{\frac{\lg 2 \cdot \lg 3}{\lg 6}}\right) = \frac{1}{\lg 2} \cdot \frac{\lg 2 \cdot \lg 3}{\lg 6} = \frac{\lg 3}{\lg 6}.$$

Аналогично,

$$\log_3 x = \frac{\lg 2}{\lg 6}.$$

Поэтому

$$\log_2 x + \log_3 x = \frac{\lg 3}{\lg 6} + \frac{\lg 2}{\lg 6} = \frac{\lg 3 + \lg 2}{\lg 6} = \frac{\lg 6}{\lg 6} = 1.$$

Значит, найденное значение x является корнем данного уравнения.

Ответ. $x = 2^{\frac{\lg 3}{\lg 6}}$.

Рассмотрим еще одно уравнение:

$$\log_2 x + \log_x 2 = 2.$$

Поскольку

$$\log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x},$$

то, обозначая $\log_2 x$ через y, получаем:

$$y + \frac{1}{y} = 2,$$

откуда $y = 1$. Следовательно, $\log_2 x = 1$ и $x = 2$. Проверка показывает, что $x = 2$ есть корень данного уравнения.

Ответ. $x = 2$.

Упражнения

Решить данные уравнения (№ 1460—1465):

1460.

а) $\lg(\lg x) = 0$;

б) $\log_2[\log_3(\log_4 x)] = 0$;

в) $\log_{x-1}(x^2 - 5x + 7) = 1$;

г) $\log_x 2 - \log_x 3 = 4$;

д) $\lg x = 3 - \lg 5$;

е) $\dfrac{\lg x}{1 - \lg 2} = 2$;

ж) $100^{\lg(x+20)} = 10\,000$.

1461. а) $\lg x = \lg 2$;

б) $\lg x = -\lg 2$;

в) $\log_2(x - 1) = \log_2(x^2 - x - 16)$;

г) $2\lg\sqrt{x} = \lg(15 - 2x)$;

д) $2\lg x = -\lg(6 - x^2)$;

е) $\dfrac{2\lg x}{\lg(5x - 4)} = 1$;

ж) $2\log_3 x = \dfrac{7}{4}\log_3\dfrac{x}{5}$.

1462. а) $\lg(0{,}5 + x) = \lg 2 - \lg x$;

б) $0{,}5\lg(2x - 1) = 1 - \lg\sqrt{x - 9}$;

в) $\lg(x + 6) - 2 = \dfrac{1}{2}\lg(2x - 3) - \lg 25$.

1463. а) $\dfrac{1}{12}\lg^2 x = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}\lg x$;

б) $\dfrac{1}{5 - \lg x} + \dfrac{2}{1 + \lg x} = 1$;

в) $\dfrac{1}{5 - 4\lg(x+1)} + \dfrac{4}{1 + \lg(x+1)} = 3$;

г) $0{,}1\lg^4 x - \lg^2 x + 0{,}9 = 0$.

1464. а) $x^x = x$;

б) $x^{\log_5 x - 2} = 125$;

в) $5^{3\lg x} = 12{,}5x$;

г) $x^{\lg x + 2} = 1000$;

д) $x = 10^{1 - 0{,}25\lg x}$;

е) $0{,}1x^{\lg x - 2} = 100$.

1465.

а) $\log_9 x + \log_{x^2} 3 = 1$;

б) $\log_2 x \cdot \log_3 x = \log_2 3$;

в) $\log_3 x + \log_5 x = \log_3 15$;

г) $\log_5 x + \log_x 5 = 2{,}5$;

д) $\log_{3x} 3 = (\log_3 3x)^2$;

е) $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$.

Решить системы уравнений (№ 1466 — 1469):

1466. $\begin{cases} \lg x + 2\lg y = -3, \\ \lg x^3 - \lg y^2 = 9. \end{cases}$

1467. $\begin{cases} x + y = 34, \\ \log_2 x + \log_2 y = 6. \end{cases}$

1468. $\begin{cases} 5^x - 36y = 0, \\ 6^x - 25y = 0. \end{cases}$

1469. $\begin{cases} xy = 40, \\ x^{\lg y} = 4. \end{cases}$

Пример 1. Решить уравнение

$$2^x = 2x.$$

На одном и том же чертеже (рис. 260) построим графики двух функций: $y = 2^x$ и $y = 2x$. Эти графики пересекаются в двух точках: A с абсциссой 1 и B с абсциссой 2. Поэтому данное уравнение имеет два корня: $x = 1$ и $x = 2$.

Пример 2. Решить уравнение

$$\lg x = x.$$

Графики функций $y = \lg x$ и $y = x$ (рис. 261) не пересекаются друг с другом. Поэтому данное уравнение не имеет корней.

Мы рассмотрели простейшие примеры. Уравнения, которые получаются при решении практических задач, обычно значительно отличаются от таких «учебных» задач. Для их решения наряду с графической иллюстрацией приходится обращаться и к таблицам. Рассмотрим, например, такое уравнение:

$$\log_2 x = \frac{1}{x}.$$

Графики функций $y = \log_2 x$ и $y = \frac{1}{x}$ (рис. 262) пересекаются в одной точке, абсцисса которой заключена между 1 и 2. Поэтому данное уравнение имеет один корень x_0, который больше 1, но меньше 2:

$$1 < x_0 < 2.$$

Возьмем точку $x = 1{,}5$, являющуюся средней точкой интервала (1;2). В этой точке

$$\log_2 x = \log_2 \frac{3}{2} =$$

$$= \log_2 3 - \log_2 2 = \frac{\lg 3}{\lg 2} - 1.$$

Используя таблицы В. М. Брадиса, находим, что

$$\log_2 \frac{3}{2} \approx 0{,}58.$$

При $x = 1{,}5$ $\quad \frac{1}{x} \approx 0{,}66.$

Поскольку в точке $x = 1{,}5$

$$\log_2 x < \frac{1}{x},$$

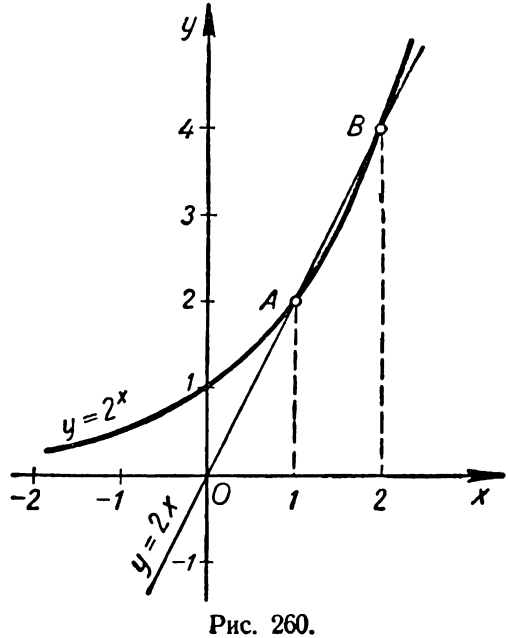

Рис. 260.

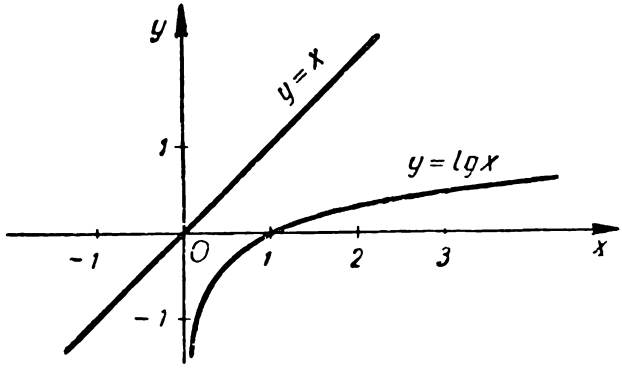

Рис. 261.

искомый корень x_0 должен быть больше, чем 1,5 (см. рис. 262).

Теперь мы уверены, что

$$1{,}5 < x_0 < 2.$$

«Испытаем» точку $x = 1{,}7$ как одну из ближайших к средней точке интервала (1,5; 2,0). При $x = 1{,}7$ получаем, используя таблицы В. М. Брадиса,

$$\log_2 x = \frac{\lg 1{,}7}{\lg 2} \approx 0{,}76;$$

$$\frac{1}{x} \approx 0{,}58.$$

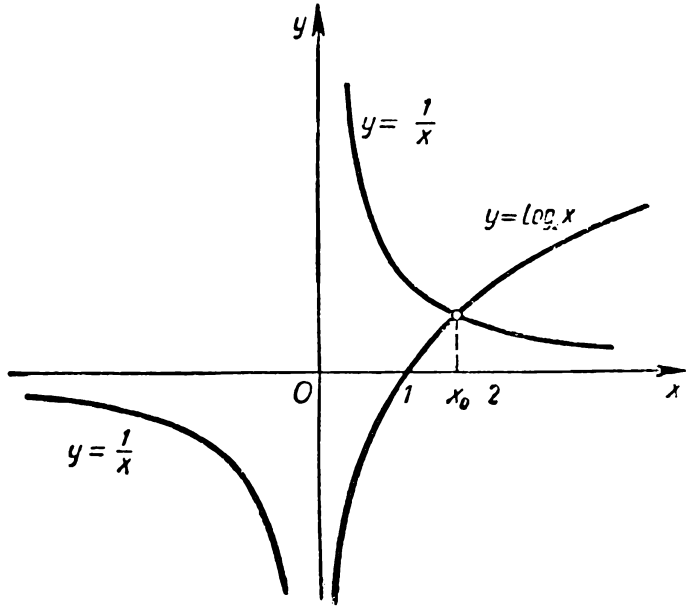

Рис 262.

Поскольку

$$\log_2 1{,}7 > \frac{1}{1{,}7},$$

искомый корень x_0 должен быть меньше, чем 1,7 (см. рис. 262). Следовательно,

$$1{,}5 < x_0 < 1{,}7.$$

Поэтому с точностью до 0,1

$$x_0 \approx 1{,}6.$$

Рассматривая точки интервала (1,5; 1,7), мы могли бы получить и более точное значение корня x_0. Попробуйте, например, самостоятельно получить приближенное значение x_0 с точностью до 0,01.

Упражнения

1470. Решить графически уравнения:

а) $2^x = x + 2$; в) $2^x = x^2$; д) $\log_2 x = \frac{x}{2}$;

б) $3^x = 3x$; г) $\log_2 x = x - 1$; е) $\log_2 (x + 3) = 3 - x$.

1471. Найти корень уравнения

$$2^x = 2 - x$$

с точностью до 0,1.

1472. Найти наименьший корень уравнения

$$\log_2 x = \frac{1}{3}x$$

с точностью до 0,01.

Показательные и логарифмические неравенства § 199

Решение показательных и логарифмических неравенств основано на том, что функции $y = a^x$ и $y = \log_a x$ при $a > 1$ являются монотонно возрастающими, а при $0 < a < 1$ — монотонно убывающими.

Рассмотрим несколько примеров.

1) Решить неравенство

$$2^x > 4.$$

Перепишем данное неравенство, представив 4 в виде 2^2:

$$2^x > 2^2.$$

Функция $y = 2^x$ является монотонно возрастающей. Поэтому большему значению этой функции соответствует большее значение аргумента. Следовательно, $x > 2$.

2) Решить неравенство

$$3^{x^2 - 3x} > \frac{1}{9}.$$

Перепишем данное неравенство, представив $\frac{1}{9}$ в виде 3^{-2}:

$$3^{x^2 - 3x} > 3^{-2}.$$

Отсюда $x^2 - 3x > -2$, или $x^2 - 3x + 2 > 0$. Это неравенство выполняется при $x < 1$, а также при $x > 2$ (ч. I, § 61).

3) Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{5}}(x-1) > -2.$$

Представив -2 как $\log_{\frac{1}{5}} 25$, перепишем данное неравенство в виде

$$\log_{\frac{1}{5}}(x-1) > \log_{\frac{1}{5}} 25.$$

Функция $y = \log_{\frac{1}{5}} x$ является монотонно убывающей. Поэтому большему значению этой функции соответствует меньшее значение аргумента. Следовательно, $x - 1 < 25$. К этому неравенству необходимо добавить еще неравенство $x-1>0$, выражающее тот факт, что под знаком логарифма может находиться только положительная величина. Таким образом, данное неравенство эквивалентно системе двух линейных неравенств

$$\begin{cases} x - 1 < 25, \\ x - 1 > 0, \end{cases}$$

из которой получаем:

$$1 < x < 26.$$

Важно отметить, что если бы мы «забыли» учесть условие $x - 1 > 0$, то пришли бы к неверному выводу: $x < 26$. В частности, в это «решение» входило бы и значение $x = 0$, при котором левая часть исходного неравенства не имеет смысла.

Упражнения

1473. Решить неравенства:

а) $3^x > \frac{1}{9}$; в) $3^x > 2$; д) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-x} < \frac{1}{9}$.

б) $3^x > 27$; г) $\left(\frac{1}{4}\right)^{6x-x^2} > \left(\frac{1}{4}\right)^5$;

1474. Решить неравенства:

а) $\lg(x+1) > \lg(5-x)$;

б) $\log_{\frac{1}{2}}(x-7) > 4$; в) $\log_{\frac{1}{7}}(2x-6) < \log_{\frac{1}{7}} x$.

1475. Данные неравенства решить графически:

а) $2^x < 2x$; б) $\log_2 x > x - 1$.

Из истории открытия логарифмов § 200

Основная идея введения логарифмов основывается на формуле

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad (1)$$

и состоит в том, что умножение можно свести к более простому действию — сложению. С идеей этой были знакомы еще математики древности. Общая формулировка, эквивалентная правилу умножения (1), дана, например, в девятой книге знаменитых «Начал» Евклида. Однако о логарифмах в древние времена не могло быть и речи. Тогда еще не рассматривались степени с дробными и от-

рицательными показателями, да и сами отрицательные числа многим математикам не были известны. Впервые дробные показатели использовал, по-видимому, французский математик О р е з м (вторая половина XIV века). Но идеи Орезма слишком опередили математику того времени, и трактат его был вскоре забыт. Нулевой и отрицательный показатели появились в работе французского математика Ш ю к е (XV век). Введение в математику степеней с произвольными действительными показателями подготовило почву для рассмотрения логарифмов.

Первые логарифмические таблицы были составлены независимо друг от друга шотландцем Н е п е р о м (1550—1617) и швейцарцем Б ю р г и (1552—1632). Характерно следующее высказывание Непера, которое он приводит в предисловии к своим таблицам: «Я всегда старался, насколько позволяли мои силы и способности, отделаться от трудности и скуки вычислений, докучность которых обыкновенно отпугивает многих от изучения математики».

Таблицы Непера были в некоторых отношениях более совершенными, чем таблицы Бюрги. Однако и они были неудобны для вычислений. Неперовские логарифмы (Nep log x) определялись (в наших обозначениях) таким образом:

$$\text{Nep log } x = 10^7 \log_e \frac{10^7}{x},$$

где $e \approx 2{,}7$ (см. ч. I, § 134). В частности,

$$\text{Nep log } 1 = 10^7 \log_e 10^7 \neq 0.$$

Такие таблицы не удовлетворяли и самого Непера. Вместе со своим почитателем Б р и г г с о м (1561—1631) Непер решил составить таблицы более простых, десятичных логарифмов. Эти таблицы были изданы Бриггсом в 1624 году уже после смерти Непера.

Наибольшее влияние оказали логарифмы на развитие астрономии. Успехи мореплавания в средние века обусловливали большой спрос на астрономические таблицы, составление которых требовало весьма сложных вычислений. Использование логарифмических таблиц значительно облегчало и ускоряло эти вычисления. По образному выражению французского математика Лапласа (1749—1827), изобретение логарифмов, сократив работу астронома, продлило ему жизнь.

Общее определение логарифмической функции и ее широкое обобщение дал Леонард Э й л е р.

Задачи на повторение

1476. Население города возрастает ежегодно на 3% по сравнению с предыдущим годом. Через сколько лет население этого города увеличится в 1,5 раза?

1477. Одна бригада за месяц вырабатывает продукции в 1,1 раза меньше, чем другая бригада. Ежемесячно производительность труда первой бригады растет на 1%, а второй бригады — на 0,7%. Через сколько месяцев первая бригада догонит вторую по сменному выпуску продукции? Какая из бригад даст больше продукции за полгода: первая или вторая?

1478. Вычислить:

а) $2^{4\log_2 3-1}$; в) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_9 2-3}$;

б) $2^{3\log_8 5+4}$; г) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_{25} 4+2}$.

1479. Построить графики функций:

а) $y = |\log_2 x|$;

б) $y = \log_2 |x|$; в) $y = \log_2 (-x)$.

1480. Решить уравнения:

а) $(\sqrt{2})^{\sin 2x} = \sqrt[4]{2}$; б) $5^{\sin 2x} = \left(\frac{1}{25}\right)^{\operatorname{tg} x}$.

1481. Найти $\log_2 \log_2 \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$.

1482. Не решая квадратного уравнения

$$\log_2^2 x - 5\log_2 x + 4 = 0,$$

доказать, что произведение его корней равно 32.

1483. Не решая данных уравнений, найти произведения их корней:

а) $\lg^2 x + \lg x - 2 = 0$;

б) $6\lg^2 x + \lg x - 1 = 0$;

в) $\lg^2 x - \lg x + 1 = 0$.

1484. Решить уравнение $\log_x a = a \quad (a > 1)$.

1485. Пользуясь таблицами десятичных логарифмов, найти:

а) $\log_7 25$; б) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$.

1486. Что больше:

а) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$ или $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$;

б) $\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{7}$ или $\log_{\frac{1}{7}} \frac{1}{5}$; в) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\lg \frac{1}{7}}$ или $\left(\frac{1}{7}\right)^{\lg \frac{1}{5}}$?

1487. При каких значениях x в интервале $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ определены функции:

а) $y = \lg(\sin x)$; б) $y = \sin(\lg x)$?

1488. Доказать, что уравнение

$$\lg \sin x = \sin x$$

не имеет действительных корней.

1489. Сколько цифр содержат числа 2^{100} и 5^{200}?

1490. Доказать, что функция $y = \lg(1 + x)$ является монотонно возрастающей, а функция $y = \lg(1 - x)$ монотонно убывающей.

Решить уравнения (№ 1491—1499):

1491. $5 \cdot 3^{2x-1} - 9^{x-0,5} = 9^x + 4 \cdot 3^{2x-2}$.

1492. $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 5^x$.

1493. $3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x$.

1494. $5^{7^x} = 7^{5^x}$.

1495. $6^{2x+1} = 2^{3+x} \cdot 3^{3x}$.

1496*. $\left(\sqrt{4 + \sqrt{15}}\right)^x - \left(\sqrt{4 - \sqrt{15}}\right)^x = \frac{3}{2}$.

1497. $\log_2 (x-1)^2 - \log_{0,5}(x-1) = 9$.

1498. $5^{\lg x} - 3^{\lg x - 1} = 3^{\lg x + 1} - 5^{\lg x - 1}$.

1499. $\log_8 x + \log_8^2 x + \log_8^3 x + \ldots = \frac{1}{2}$.

1500. Не пользуясь таблицей логарифмов, найти $\lg 2$ и $\lg 5$, если известно, что $\lg 2 - \lg 5 \approx -0{,}3980$.

1501. Доказать тождества:

а) $a^{\lg b} = b^{\lg a}$; б) $a^{\frac{\log_b(\log_b a)}{\log_b a}} = \log_b a$.

1502. Какое число больше, a или b, если:

а) $\log_2 a = \log_3 b$; б) $\log_a 2 = \log_b 3$?

1503. Выразить $\log_{ab} x$ через $\log_a x$ и $\log_b x$.

1504. Доказать тождество

$$\log_a(b + \sqrt{b^2 - 1}) = -\log_a(b - \sqrt{b^2 - 1}).$$

Решить уравнения (№ 1505—1507):

1505. $3\lg^2(x^2) - \lg x - 1 = 0$.

1506. $2\lg^2(x^3) - 3\lg x - 1 = 0$.

1507. $4\log^2{}_3 5x - 7\log_3 15x + 7 = 0$.

Решить системы уравнений (№ 1508, 1509):

1508. $\begin{cases} 3^{\sin x} \cdot 3^{\cos y} = 3, \\ 3^{\sin x \cos y} = 1. \end{cases}$ **1509.** $\begin{cases} \lg \sin x + \lg \sin y = \lg \frac{3}{2}, \\ \sin^2 x + \sin^2 y = \frac{3}{4}. \end{cases}$

1510. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^{\sqrt{y}} = y, \\ y^{\sqrt{x}} = x^y. \end{cases}$$

1511. Определить интервалы возрастания и интервалы убывания функций:

а) $y = 2^{x^2+4x+3}$ б) $y = \log_{\frac{1}{5}}(8 + 2x - x^2)$.

Решить неравенства (№ 1512—1514):

1512. $\lg(x^2 - 3) > \lg(x + 3)$.

1513. $\lg^2 x - 2\lg x - 8 \leqslant 0$.

1514. $(0{,}25)^{x-4} \leqslant \left(\frac{1}{16}\right)^x$.

ФУНКЦИИ И ПРЕДЕЛЫ

IX

Постоянные и переменные величины. Понятие функции

§ 201

С понятием функции мы уже неоднократно сталкивались. В части I мы рассмотрели линейную, квадратную, степенную и тригонометрические функции. Предыдущая глава была посвящена изучению показательной и логарифмической функций. Теперь нам предстоит сделать общий обзор того, что мы уже знаем о функциях, и рассмотреть некоторые новые вопросы.

Наблюдая различные процессы, можно заметить, что величины, участвующие в них, ведут себя по-разному: одни из них изменяются, другие остаются постоянными. Если, например, в треугольнике ABC вершину B перемещать по прямой MN, параллельной основанию AC (рис. 263), то величины углов A, B и C при этом будут непрерывно изменяться, а сумма их, высота h и площадь треугольника будут оставаться неизменными.

Другой пример. Если какой-нибудь газ сжимать при постоянной температуре, то объем его (V) и давление (p) будут изменяться: объем уменьшаться, а давление увеличиваться. Произведение же этих величин, как устанавливает закон Бойля — Мариотта, будет оставаться постоянным:

$$Vp = c,$$

где c — некоторая константа.

Все величины можно разделить на *постоянные* и *переменные*.

Переменные величины, участвующие в каком-либо процессе, обычно изменяются не независимо друг от друга, а в тесной связи друг с другом. Например, сжатие газа (при постоянной температуре) приводит к изменению его объема, а это, в свою очередь, обусловливает изменение давления газа. Изменение радиуса основания цилиндра вызывает изменение площади этого основания; последнее же приводит к изменению объема цилиндра

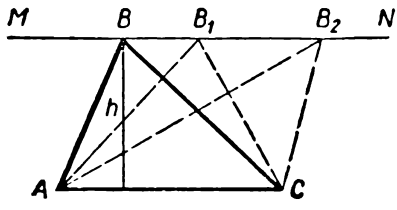

Рис. 263.

и т. д. Одна из главных задач математического изучения того или иного процесса заключается в том, чтобы установить, как изменение одних переменных величин влияет на изменение других переменных величин.

Рассмотрим несколько примеров. Упомянутый выше закон Бойля — Мариотта говорит, что при постоянной температуре объем газа V изменяется обратно пропорционально давлению p: $V = \frac{c}{p}$. Если известно давление, то по этой формуле можно вычислить объем газа. Аналогично, формула $S = \pi r^2$ позволяет определить площадь круга S, если известен его радиус r. По формуле $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ можно найти острый угол прямоугольного треугольника, если известен другой острый угол этого треугольника, и т. д.

При сравнении двух переменных величин одну из них удобно рассматривать как *независимую* переменную, а другую — как *зависимую* переменную величину. Например, радиус круга r естественно считать независимой переменной, а площадь круга $S = \pi r^2$ — зависимой переменной величиной. Аналогично, давление газа p можно считать независимой переменной величиной; тогда его объем $V = \frac{c}{p}$ будет зависимой переменной величиной.

Какую же из двух переменных величин выбрать в качестве зависимой и какую в качестве независимой? Этот вопрос решается по-разному в зависимости от поставленной цели. Если, например, нас интересует, к чему приводит изменение давления газа при постоянной температуре, то естественно давление принять за независимую, а объем — за зависимую переменную величину. В этом случае зависимая переменная величина V будет выражаться через независимую величину p по формуле: $V = \frac{c}{p}$. Если же мы хотим выяснить последствия сжатия газа, то лучше объем рассматривать как независимую, а давление — как зависимую переменную величину. Тогда зависимая переменная величина p будет выражаться через независимую переменную величину V по формуле $p = \frac{c}{V}$. В любом из этих случаев две величины связаны между собой так, что каждому возможному значению одной из них соответствует вполне определенное значение другой.

Если каждому значению одной переменной величины x каким-либо образом поставлено в соответствие вполне определенное значение другой величины y, то говорят, что задана функция. Величину y при этом называют *зависимой* переменной величиной или *функцией*, а величину x — *независимой* переменной величиной или *аргументом*.

Для выражения того, что y есть функция аргумента x, обычно используют обозначения: $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = \varphi(x)$ и т. д. (читается: игрек равно эф от икс, игрек равно же от икс, игрек равно фи от икс и т. д.). Выбор буквы для обозначения функции (f, g, φ) является, конечно, несущественным. Существенно лишь то, какую связь между величинами x и y выражает эта буква.

Значение, которое принимает функция $f(x)$ при $x = a$, обозначается $f(a)$. Если, например, $f(x) = x^2 + 1$, то

$$f(1) = 1^2 + 1 = 2;$$
$$f(2) = 2^2 + 1 = 5;$$
$$f(a + 1) = (a + 1)^2 + 1 = a^2 + 2a + 2;$$
$$f(2a) = (2a)^2 + 1 = 4a^2 + 1$$

и т. д.

Упражнения

1515. Газ, находящийся под давлением в 2 атмосферы, сжимается. Как изменяется при этом: а) вес газа; б) его объем; в) его давление?

1516. По электрической цепи течет ток. С помощью реостата мы изменяем сопротивление цепи. Изменяется ли при этом: а) ток в цепи; б) напряжение тока?

1517. Вершина B треугольника ABC движется по окружности, диаметр которой совпадает с основанием AC этого треугольника. Какие величины в этом процессе остаются постоянными и какие изменяются?

1518. $f(x) = \dfrac{1 + x}{1 - x}$.

Найти: а) $f(0)$; б) $f(a^2)$; в) $f\left(\dfrac{1}{a}\right)$; г) $f(\sin a)$.

1519. Выразить $f(2a)$ через $f(a)$ для функций:

а) $f(x) = \sin x$; б) $f(x) = \operatorname{tg} x$; в) $f(x) = x^2$.

Способы задания функций § 202

Задать функцию — это значит указать, как по значениям аргумента отыскиваются соответствующие значения функции.

В школьном курсе математики мы привыкли к *аналитическому* способу задания функции. При таком способе указывается формула, связывающая зависимую переменную величину (функцию) с независимой переменной величиной (аргументом), например: $y = \sqrt{x}$, $y = \lg x$, $S = \pi r^2$, $V = \dfrac{c}{p}$ и т. д. Рассмотрим более сложные примеры функций, заданных аналитически.

Пусть

$$y = \begin{cases} x & \text{если } x < 0, \\ \sin x, & \text{если } x \geqslant 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Каждому значению x поставлено в соответствие вполне определенное значение y, причем при отрицательных значениях x величина y находится по формуле $y = x$, а при неотрицательных значениях x — по формуле $y = \sin x$. Если, например, $x = -2$, то $y = x = -2$; если $x = \frac{\pi}{2}$, то $y = \sin \frac{\pi}{2} = 1$ и т. д.

Не следует думать, что соотношение (1) определяет две функции. Речь идет лишь об одной функции y, которая при отрицательных значениях аргумента x ведет себя как линейная функция $y = x$, а при неотрицательных значениях аргумента x — как тригонометрическая функция $y = \sin x$.

График рассматриваемой функции представлен на рисунке 264.

Рассмотрим еще один пример:

$$y = \begin{cases} x^2, \text{ если } x \leqslant 0, \\ 3, \text{ если } x > 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Это соотношение между величинами x и y также определяет одну функцию. График ее представлен на рисунке 265. Стрелочка на прямолинейном участке указывает, что точка M не принадлежит графику данной функции. Ведь согласно формуле (2) при $x = 0$ величина y находится по формуле $y = x^2$, а не по формуле $y = 3$. Поэтому при $x = 0$ y также равен 0.

Предположим, что функция y задана посредством некоторого выражения $f(x)$, например: $y = x^2$, $y = \operatorname{tg} x$ и т. д. Если при этом не сделано никаких оговорок относительно того, в каких пределах изменяются значения аргумента x, то мы будем считать, что выражение $f(x)$ задает нашу функцию при всех тех значениях x, при которых оно определено. Так, запись $y = x^2$ означает, что $y = x^2$ при всех действительных значениях x. Аналогично, запись $y = \lg x$ означает, что $y = \lg x$ при всех положительных значениях x.

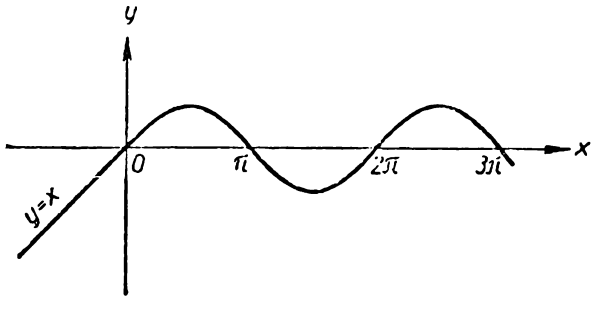

Рис. 264.

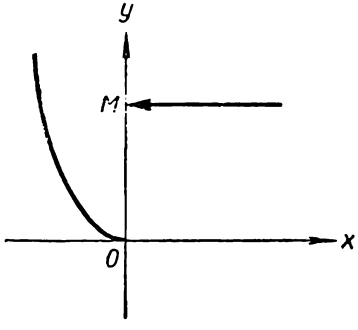

Рис. 265.

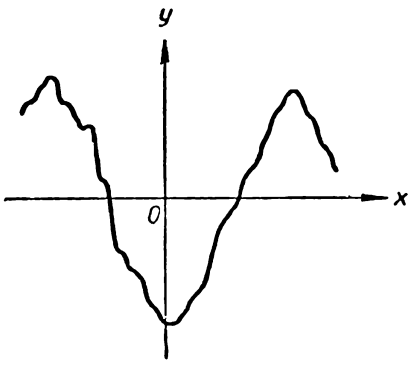

Рис. 266.

Помимо аналитического способа, на практике часто пользуются *графическим* способом задания функций. Этот способ удобен, когда задать функцию аналитически довольно трудно (см., например, рис. 266). Кроме того, при изучении многих процессов мы пользуемся приборами, которые не могут говорить с нами на языке формул. Однако с помощью этих приборов мы получаем кривые, по которым можно судить о характере изменения одних величин в зависимости от изменения других величин. В медицине, например, широко используются электрокардиографы. С помощью этих приборов можно получать электрокардиограммы — кривые, которые отражают изменение электрических импульсов, возникающих в мышце сердца. Такие кривые помогают сделать правильные заключения о работе сердца.

Графический способ задания функции очень часто используется в математике для иллюстрации тех или иных свойств функций.

При изучении некоторых процессов удобно пользоваться также *табличным* способом задания функций. Метеорологи, например, составляют таблицы выпавших осадков в различных точках земного шара. Эти различные точки земного шара выступают в данном случае в роли «значений аргумента», а количества осадков — в роли «значений функции».

Упражнения

1520. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{если } x \leqslant 0, \\ \sin x, & \text{если } x > 0. \end{cases}$

Найти:

а) $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; б) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$; в) $f(0)$; г) $f(a^2)$.

1521. $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2, & \text{если } x < 2, \\ \sin x, & \text{если } x \geqslant 2. \end{cases}$

Найти:

а) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$; б) $f(\pi)$; в) $f(2 - a^2)$.

Построить графики следующих функций (№ 1522—1525):

1522. $y = \begin{cases} -1, & \text{если } x < -1, \\ x, & \text{если } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$

1523. $y = \begin{cases} 1{,}5x + 3, \text{ если } x < 0, \\ 3 - 2x, \text{ если } x \geqslant 0. \end{cases}$

1524. $y = \begin{cases} x + 6, \text{ если } x < -2, \\ x^2 - x - 2, \text{ если } |x| \leqslant 2, \\ 0, \text{ если } x > 2. \end{cases}$

1525. $y = \begin{cases} 2^x, \text{ если } x > 0, \\ 1, \text{ если } x \leqslant 0. \end{cases}$

1526. Как по графику функции $y = f(x)$ построить график функции $y = f(x) + c$, где c — некоторое заданное число?

Ответ пояснить на примере функций:

а) $y = \frac{1}{x} + 2$; б) $y = \frac{1}{x} - 1$; в) $y = 2^x + 1$; г) $y = \lg x - 2$.

1527. Как по графику функции $y = f(x)$ построить график функции $y = f(x + a)$, где a — некоторое заданное число?

Ответ пояснить на примере следующих функций:

1) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; 4) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$;

2) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; 5) $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

3) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$; 6) $y = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

1528. Как по графику функции $y = f(x)$ построить график функции $y = Af(x)$, где A — некоторое заданное число?

Ответ пояснить на примере следующих функций:

1) $y = 2x^2$; 3) $y = -2x^2$; 5) $y = -2\cos x$;

2) $y = -x^2$; 4) $y = 3\sin x$; 6) $y = \frac{1}{3}\operatorname{tg} x$.

1529. Как по графику функции $y = f(x)$ построить график функции $y = |f(x)|$?

Ответ пояснить на примере следующих функций:

1) $y = |x^2 - x - 6|$; 3) $y = |\cos x|$;
2) $y = |-6x^2 + x + 1|$; 4) $y = |\sin x|$.

1530. Как по графику функции $y = f(x)$ построить график функции $y = f(\omega x)$, где ω — некоторое заданное число?

Ответ пояснить на примере следующих функций:

1) $y = \sin 2x$; 3) $y = \cos 1{,}5x$;

2) $y = \sin \frac{x}{2}$; 4) $y = \cos \frac{x}{3}$.

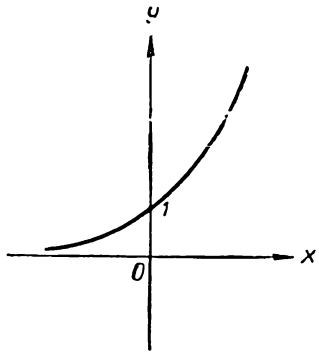

Рис. 267.

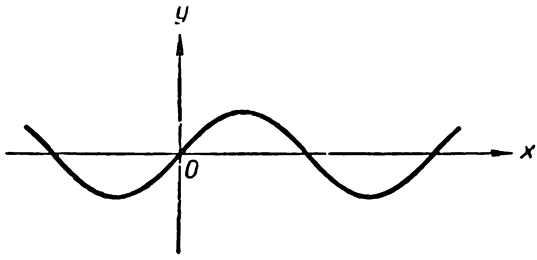

Рис. 268.

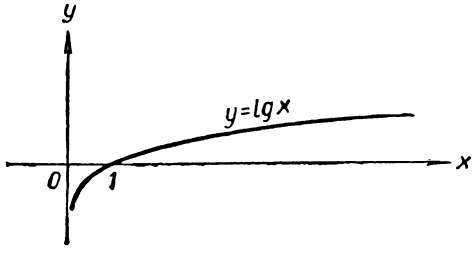

Рис. 269.

Область определения и область изменения функции § 203

Каким бы способом ни была задана функция $y = f(x)$, рассматривая ее, мы всегда имеем дело с двумя множествами: множеством значений, которые может принимать аргумент x, и множеством значений, которые может принимать функция y. Например, для функции $y = 2^x$ (рис. 267) множеством всех значений, которые может принимать аргумент x, является совокупность всех действительных чисел, а множеством всех значений, которые может принимать функция y, — совокупность всех положительных чисел.

Совокупность всех тех значений, которые принимает аргумент x функции $y = f(x)$, называется областью определения этой функции. Совокупность всех тех значений, которые принимает сама функция y, называется областью изменения этой функции.

Например, областью определения функции $y = \sin x$ (рис. 268) является совокупность всех действительных чисел, а областью изменения — совокупность всех чисел, заключенных между —1 и 1, включая эти два числа. Для функции $y = \lg x$ (рис. 269) областью опре-

деления является совокупность всех положительных чисел, а областью изменения — совокупность всех действительных чисел и т. д.

Ранее мы изучали числовые последовательности. Члены любой числовой последовательности можно рассматривать как возможные значения некоторой функции, определенной для натуральных значений аргумента. Например, члены последовательности

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

являются значениями функции $y = \frac{1}{n}$, а члены последовательности

$$1, -1, 1, -1, \ldots$$

— значениями функции $y = (-1)^{n+1}$. Каждую из этих функций мы рассматриваем как функцию, определенную только для натуральных значений аргумента n. Вот почему иногда говорят, что ***числовая последовательность есть функция натурального аргумента.***

Рассмотрим несколько более сложных примеров на нахождение области определения функции.

Пример 1. Найти область определения функции

$$y = \frac{x-1}{x^2+2x-3}.$$

Эта функция определена для всех значений x, кроме тех, при которых знаменатель дроби $x^2 + 2x - 3$ обращается в нуль. Решая уравнение $x^2 + 2x - 3 = 0$, находим: $x_1 = 1$, $x_2 = -3$. Поэтому областью определения данной функции является совокупность всех действительных чисел, кроме 1 и — 3.

Пример 2. Найти область определения функции

$$y = \sqrt{\frac{2x-4}{3-6x}}.$$

Корни квадратные определены только для неотрицательных чисел. Поэтому область определения данной функции можно рассматривать как совокупность всех значений x, удовлетворяющих неравенству

$$\frac{2x-4}{3-6x} \geqslant 0.$$

Прежде всего выясним, при каких значениях аргумента x числитель и знаменатель этой дроби положительны и при каких отрицательны. Решая неравенство $2x - 4 > 0$, получаем $x > 2$. Таким образом, при $x > 2$ числитель положителен; при $x < 2$

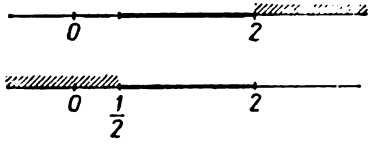

Рис. 270.

он, очевидно, отрицателен. Это отмечено на рисунке 270. Заштрихованная часть верхней числовой прямой соответствует той области, в которой он положителен, а незаштрихованная — той области, в которой он отрицателен. Аналогично исследуется знаменатель $3 - 6x$. Имеем:

$$3 - 6x > 0;$$
$$3 > 6x;$$
$$6x < 3;$$
$$x < \frac{1}{2}.$$

Заштрихованная часть второй числовой прямой на рисунке 270 соответствует области, в которой знаменатель $3 - 6x$ положителен, а незаштрихованная — области, в которой он отрицателен.

Из рисунка 270 видно, что оба выражения (числитель и знаменатель) имеют одинаковые знаки только при $\frac{1}{2} < x < 2$. Поэтому в этой области дробь $\frac{2x-4}{3-6x}$ положительна. При $x = 2$ она обращается в 0. Следовательно, областью определения данной функции является совокупность действительных чисел, удовлетворяющих неравенству

$$\frac{1}{2} < x \leqslant 2.$$

Пример 3. Найти область определения функции

$$y = \lg\left(\frac{2x}{x+1} - 1\right).$$

Десятичные логарифмы определены только для положительных чисел. Поэтому область определения данной функции можно рассматривать как совокупность всех значений x, удовлетворяющих неравенству

$$\frac{2x}{x+1} - 1 > 0.$$

Выполнив вычитание в левой части этого неравенства, получим:

$$\frac{x-1}{x+1} > 0.$$

Числитель этой дроби положителен при $x > 1$ и отрицателен при $x < 1$, а знаменатель положителен при $x > -1$ и отрицателен при $x < -1$ (рис. 271). Поэтому дробь положительна при $x < -1$ и при $x > 1$. Все эти значения x можно записать в виде одного неравенства $|x| > 1$.

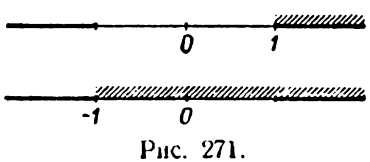

Рис. 271.

Пример 4. Найти область определения функции

$$y = \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x - \cos x}.$$

Во-первых, $\operatorname{tg} x$ не определен для $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$. Во-вторых, данная дробь не определена для тех значений x, при которых знаменатель обращается в нуль. Эти значения находятся из уравнения $\sin x - \cos x = 0$. Это однородное тригонометрическое уравнение. Деля обе его части на $\cos x$ (докажите, что это деление возможно!), получим:

$$\operatorname{tg} x = 1,$$

откуда

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Итак, областью определения данной функции является совокупность всех действительных чисел, кроме $\frac{\pi}{2} + n\pi$ и $\frac{\pi}{4} + k\pi$, где n и k — произвольные целые числа.

Теперь мы рассмотрим несколько примеров на нахождение области изменения функции.

Пример 5. Как известно, линейная функция $y = ax + b$ при $a \neq 0$ принимает любые действительные значения. Поэтому областью изменения этой функции является совокупность всех действительных чисел.

Пример 6. Найти область изменения функции

$$y = x^2 - 4x + 7.$$

Преобразуем квадратный трехчлен $x^2 - 4x + 7$, выделив из него полный квадрат: $y = x^2 - 4x + 4 + 3 = (x - 2)^2 + 3$.

Выражение $(x - 2)^2$ принимает, очевидно, все неотрицательные значения. Поэтому областью изменения данной функции является совокупность всех чисел, больших или равных 3. Эту область можно задать с помощью неравенства $y \geqslant 3$.

Пример 7. Найти область изменения функции

$$y = \sin x + \cos x.$$

Представив данную функцию в виде

$$y = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

(вспомните, как это делается), нетрудно понять, что область ее изменения определяется неравенством

$$-\sqrt{2} \leqslant y \leqslant \sqrt{2}, \text{ или } |y| \leqslant \sqrt{2}.$$

Упражнения

Найти области определения функций (№ 1531—1566):

1531. $y = \dfrac{3x+1}{3x-6}$.

1532. $y = \dfrac{x^2-9}{x+3}$.

1533. $y = \dfrac{5}{6x^2-x-1}$.

1534. $y = \dfrac{3x-1}{x^2+x+1}$.

1535. $y = \sqrt{x-1}$.

1536. $y = \sqrt{5-10x}$.

1537. $y = \sqrt{1-\cos x}$.

1538. $y = \sqrt{\sin x - 1}$.

1539. $y = 2\sqrt{x-1} - \dfrac{5}{\sqrt{4-x}}$.

1540. $y = \sqrt{x^2+2x+4}$.

1541. $y = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$.

1542. $y = \sqrt{x^2-4x-12}$.

1543. $y = \sqrt{(1-x)(1+5x)}$.

1544. $y = \log_2(x^2-4x-5)$.

1545. $y = \log_{\frac{1}{3}}(-3x^2-7x-2)$.

1546. $y = \sqrt{\dfrac{2x-4}{x+1}}$.

1547. $y = \sqrt{-\dfrac{x-4}{2-x}}$.

1548. $y = \sqrt{\dfrac{1}{x}-1}$.

1549. $y = \sqrt{2+\dfrac{x}{1-x}}$.

1550. $y = \lg\dfrac{x(x-3)}{2x-5}$.

1551. $y = \lg\dfrac{x-5}{2+x-x^2}$.

1552. $y = \operatorname{tg}\dfrac{1}{x}$.

1553. $y = \operatorname{ctg}\pi x$.

1554. $y = (\sin \pi x)^{-1}$.

1555. $y = \dfrac{\cos x}{\sqrt{3}-2\sin x}$.

1556. $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}+2\cos x}$.

1557. $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}+\operatorname{tg} x}$.

1558. $y = \dfrac{1}{\sin x \cdot \cos x}$.

1559. $y = \dfrac{1}{\sin x + \cos x}$.

1560. $y = \dfrac{\sin x + \sqrt{3}\cos x}{\sin x - \sqrt{3}\cos x}$.

1561. $y = \dfrac{1000}{\sqrt{2}\sin^2 x - \cos x}$.

1562. $y = 2^{-\sqrt{-x}}$.

1563. $y = 3^{\sqrt{x}} + 3^{\sqrt{-x}}$.

1564. $y = \lg|6x-8|$.

1565. $y = \lg\cos x$.

1566. $y = \lg\operatorname{tg} x$.

1567. (У с т н о.) Найти области изменения следующих функций:

а) $y = |\sin x|$;
б) $y = \cos^2 x$;
в) $y = \cos x - 1$;
г) $y = \operatorname{tg}^2 x$;
д) $y = \sin^2 x + \cos^2 x$;
е) $y = \cos x - \sin x$;
ж) $y = 3\sin x + 4\cos x$,
з) $y = 12\sin x - 5\cos x$;
и) $y = \sin x \cdot \cos x$.

1568. Найти области изменения функций:

а) $y = (x - 3)^2 - 1$;
б) $y = -(x + 2)^2 + 5$;
в) $y = 2x^2 - 28x + 96$;
г) $y = 5^{\sin x}$;
д) $y = x - |x|$;
е) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

1569. Сравнить области определения функций:

а) $y = x$ и $y = 10^{\lg x}$;
б) $y = 2 \lg x$ и $y = \lg x^2$.

Построить графики этих функций.

Возрастание и убывание функций § 204

Функция $f(x)$ называется *монотонно возрастающей* (или просто *возрастающей*) в интервале $a \leqslant x \leqslant b$, если из условия $x_2 > x_1$ вытекает, что

$$f(x_2) > f(x_1).$$

При этом

$$a \leqslant x_1 \leqslant b,\ a \leqslant x_2 \leqslant b.$$

Другими словами, *функция называется монотонно возрастающей в некотором интервале, если из двух произвольных значений аргумента, взятых из этого интервала, большему соответствует большее значение функции.*

Например, функция $y = \sin x$ (см. рис. 268 на стр. 132) является возрастающей в интервалах $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}\pi$, $\frac{7}{2}\pi \leqslant x < \frac{9}{2}\pi$ и т. д. Функция $y = 2^x$ (см. рис. 267) является возрастающей на всей числовой прямой. Функция $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ нигде не возрастает (рис. 272).

Если функция $y = f(x)$ монотонно возрастает в интервале $a \leqslant x \leqslant b$, то график ее в этом интервале с ростом x поднимается все выше и выше. Это, конечно, не означает, что график «уходит» вверх как угодно высоко. Например, график функции $y = -\frac{1}{x}$ при положительных значениях x (см. рис. 273) поднимается с ростом аргумента все выше и выше. Тем не менее он никогда не перейдет и даже не дойдет до оси абсцисс.

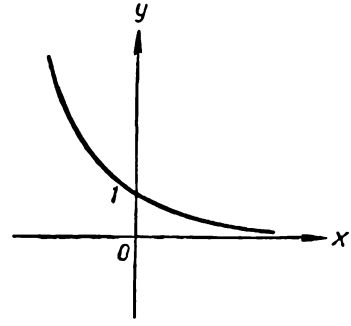

Рис. 272.

Функция $y = f(x)$ называется *монотонно убывающей* (или просто *убываю-*

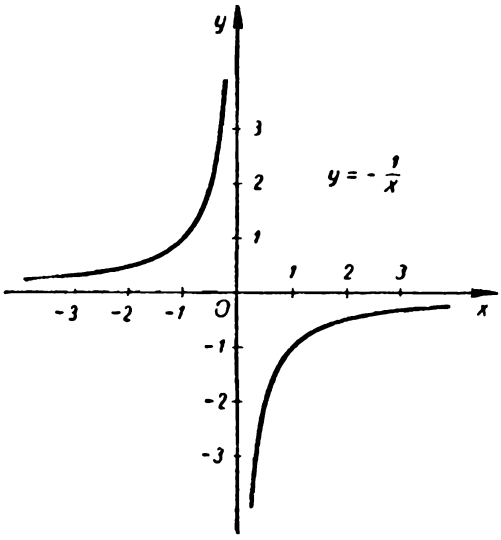

Рис. 273.

щей) в интервале $a \leqslant x \leqslant b$, если из условия $x_2 > x_1$ вытекает, что

$$f(x_2) < f(x_1).$$

При этом

$a \leqslant x_1 \leqslant b$, $a \leqslant x_2 \leqslant b$.

Другими словами, *функция называется монотонно убывающей в некотором интервале, если из двух произвольных значений аргумента, взятых из этого интервала, большему соответствует меньшее значение функции.*

Например, функция $y = \sin x$ монотонно убывает в интервалах $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\pi$, $\frac{5}{2}\pi \leqslant x \leqslant \frac{7}{2}\pi$, $\frac{9}{2}\pi \leqslant x \leqslant \frac{11}{2}\pi$ и т. д. Функция $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ убывает на всей числовой прямой. Функция $y = 2^x$ нигде не убывает.

Если функция $f(x)$ монотонно убывает в интервале $a \leqslant x \leqslant b$, то график ее в этом интервале с ростом x опускается все ниже и ниже. Это также не означает, что график «уходит» как угодно далеко вниз. Учащимся предлагается самостоятельно построить соответствующий рисунок.

Функции, которые в интервале $a \leqslant x \leqslant b$ только возрастают или только убывают, называются *монотонными* в этом интервале.

До сих пор мы говорили об интервале $a \leqslant x \leqslant b$. Такой интервал включает в себя крайние точки $x = a$ и $x = b$ и потому называется *замкнутым* интервалом. Но в некоторых случаях говорить о замкнутом интервале нехорошо. Неудобно, например, говорить о поведении функции $y = \operatorname{tg} x$ в интервале $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$. Ведь при $x = -\frac{\pi}{2}$ и $x = \frac{\pi}{2}$ эта функция вообще не определена. Поэтому вместо интервала $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ лучше говорить об интервале $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Такой интервал не содержит крайних точек $x = -\frac{\pi}{2}$ и $x = \frac{\pi}{2}$ и поэтому называется *открытым* интервалом.

В дальнейшем нам придется говорить как об открытых, так и о замкнутых интервалах. Однако в каждом из этих случаев

будет ясно, о каком интервале идет речь, и потому мы будем говорить просто об интервалах. Отметим лишь, что замкнутый интервал $a \leqslant x \leqslant b$ обычно записывается в виде $[a, b]$, а открытый интервал $a < x < b$ — в виде (a, b).

Упражнения

Определить участки возрастания и участки убывания данных функций; построить графики этих функций (№ 1570—1585):

1570. $y = x^2 + 3x - 108$.

1571. $y = -x^2 + 3x + 4$.

1572. $y = |x^2 + 3x - 10|$.

1573. $y = |-x^2 + 3x + 4|$.

1574. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

1575. $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

1576. $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

1577. $y = \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

1578. $y = |\cos x|$.

1579. $y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

1580. $y = \sin 2x$.

1581. $y = \cos\frac{x}{2}$.

1582. $y = \lg(1 + x)$.

1583. $y = \lg(1 - x)$.

1584. $y = \frac{5x + 4}{x}$.

1585. $y = \frac{x + 1}{x - 1}$.

1586. Определить участки возрастания и участки убывания функций:

а) $y = 2^{3-6x}$; б) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-5}$.

1587. Доказать, что сумма двух функций, монотонно возрастающих в некотором интервале, есть функция, монотонно возрастающая в этом интервале.

1588. Будет ли разность двух монотонно возрастающих функций монотонно возрастающей функцией?

Экстремальные значения функции § 205

В этом параграфе мы изучим некоторые вопросы поведения функции $y = f(x)$ в интервале $[a, b]$. При этом, конечно, мы будем предполагать, что функция $f(x)$ определена в каждой точке этого интервала.

Наибольшее из всех тех значений, которые принимает функция $y = f(x)$ в интервале $[a, b]$, называется ее абсолютным максимумом, а наименьшее — абсолютным минимумом в данном интервале.

Например, для функции $y = f(x)$, графически представленной на рисунке 274, абсолютным минимумом в интервале $[0, 7]$ является значение $f(0) = 1$, а абсолютным максимумом — значение $f(6) = 5$.

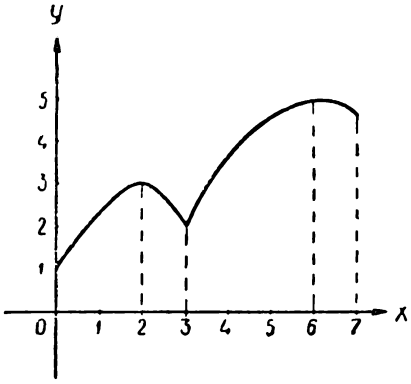

Рис. 274.

Наряду с абсолютным максимумом и абсолютным минимумом в математике часто говорят о *локальных* (т. е. местных) максимумах и минимумах.

Точка $x = c$, лежащая внутри интервала $[a, b]$, называется точкой локального максимума функции $y = f(x)$, если для всех значений x, достаточно близких к c,

$$f(x) \leqslant f(c). \qquad (1)$$

Значения функции $y = f(x)$ в точках ее локальных максимумов называются локальными максимумами этой функции. Например, для функции $y = f(x)$, графически представленной на рисунке 274, точками локального максимума являются точки $x = 2$ и $x = 6$, а самими локальными максимумами — значения

$$f(2) = 3 \text{ и } f(6) = 5.$$

В точках $x = 2$ и $x = 6$ функция $f(x)$ принимает значения, большие, чем в соседних точках, достаточно близких к ним:

$$f(2) > f(x); \qquad f(6) > f(x).$$

Для функции $y = f(x)$, графически представленной на рисунке 275, точкой локального максимума будет, например, точка $x = c$. Для всех x, достаточно близких к c,

$$f(x) = f(c),$$

так что условие (1) выполняется. Точка $x = x_1$ также является точкой локального максимума. Для всех значений x, достаточно близких к x_1, $f(x) < f(x_1)$, если $x < x_1$, и $f(x) = f(x_1)$, если $x > x_1$. Следовательно, и в этом случае $f(x) \leqslant f(x_1)$. А вот точка $x = x_2$ уже не будет точкой локального максимума. Левее ее $f(x) = f(x_2)$, но правее ее $f(x) > f(x_2)$. Поэтому условие (1) не выполняется.

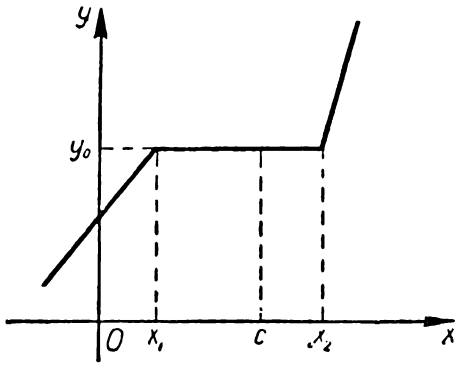

Рис. 275.

Точка $x = c$, лежащая внутри интервала $[a, b]$, называется точкой локального минимума функции $y = f(x)$, если для всех значений x, достаточно близких к c,

$$f(x) \geqslant f(c). \qquad (2)$$

Значения функции в точках ее локальных минимумов называют-

ся локальными минимумами этой функции. Например, для функции $y = f(x)$, графически представленной на рисунке 274, точкой локального минимума является точка $x = 3$, а самим локальным минимумом — значение $f(3) = 2$.

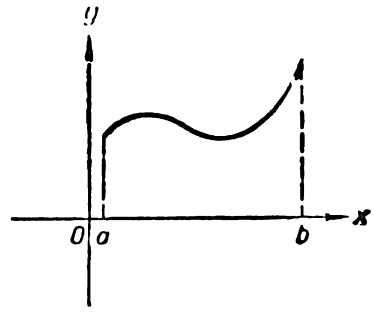

Рис. 276.

Для функции, графически представленной на рисунке 275, точкой локального минимума будет, например, точка $x = x_2$. Для всех значений x, достаточно близких к x_2, $f(x) = f(x_2)$, если $x < x_2$, и $f(x) > f(x_2)$, если $x > x_2$. Следовательно, условие $f(x) \geqslant f(x_2)$ выполняется. Точка $x = c$, отмеченная нами выше как точка локального максимума, является вместе с тем и точкой локального минимума. Ведь для всех точек x, достаточно близких к ней,

$$f(x) = f(c),$$

и потому формально неравенство $f(x) \geqslant f(c)$ выполняется.

Точки минимумов и точки максимумов функции $f(x)$ называются *точками экстремумов* этой функции. Значения функции $f(x)$ в точках экстремумов называются *экстремальными значениями* этой функции.

Рисунок 274 показывает различие между абсолютными и локальными экстремумами. Функция $y = f(x)$, изображенная на этом рисунке, имеет в точке $x = 2$ локальный максимум, который не является абсолютным максимумом в интервале $[0, 7]$. Точно так же в точке $x = 3$ эта функция имеет локальный минимум, не являющийся абсолютным минимумом в интервале $[0, 7]$.

Если абсолютный максимум функции $y = f(x)$ в интервале $[a, b]$ достигается во внутренней точке этого интервала, то этот абсолютный максимум является, очевидно, и локальным максимумом (см., например, рис. 274 в точке $x = 6$). Но может случиться, что этот абсолютный максимум достигается не внутри интервала $[a, b]$, а в какой-нибудь крайней его точке (рис. 276). Тогда он не является локальным максимумом. Отсюда вытекает следующее правило для нахождения абсолютного максимума функции $y = f(x)$ в интервале $[a, b]$.

1. Находим все локальные максимумы функции $y = f(x)$ в данном интервале.

2. К полученным значениям добавляем значения этой функции в концах данного интервала, то есть значения $f(a)$ и $f(b)$.

Наибольшее из всех этих значений и даст нам абсолютный максимум функции $y = f(x)$ в интервале $[a, b]$.

Аналогично находится и абсолютный минимум функции $y = f(x)$ в интервале $[a, b]$.

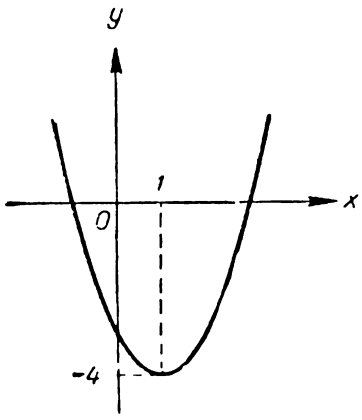

Рис. 277.

Пример. Найти все локальные экстремумы функции $y = x^2 - 2x - 3$. Каковы наибольшее и наименьшее значения этой функции в интервале [0, 5]?

Преобразуем данную функцию, выделив полный квадрат: $y = x^2 - 2x + 1 - 4 = (x - 1)^2 - 4$. Теперь легко построить ее график. Это будет направленная вверх парабола с вершиной в точке (1, —4) (рис. 277). Единственной точкой локального экстремума является точка $x = 1$. В этой точке функция имеет локальный минимум, равный —4. Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения данной функции в интервале [0, 5], заметим, что при $x = 0$ $y = -3$, а при $x = 5$ $y = 12$. Из трех значений —4, —3 и 12 наименьшим является —4, а наибольшим 12. Таким образом, наименьшее значение (абсолютный минимум) данной функции в интервале [0, 5] равно —4; оно достигается при $x = 1$. Наибольшее значение (абсолютный максимум) данной функции в интервале [0, 5] равно 12; оно достигается при $x = 5$.

Упражнения

1589. Какие из известных вам функций на всей числовой прямой:

а) совсем не имеют локальных экстремумов;

б) имеют ровно один локальный экстремум;

в) имеют бесконечное множество локальных экстремумов?

В упражнениях № 1590—1600 найти точки локальных экстремумов и сами локальные экстремумы данных функций. Выяснить, какие это экстремумы (максимумы или минимумы):

1590. $y = (x - 1)^2 + 5$.

1591. $y = 3 - (x + 2)^2$.

1592. $y = 12x^2 - x - 1$.

1593. $y = (x - 1)(x - 3)$.

1594. $y = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$.

1595. $y = \dfrac{1}{2 - \cos x}$.

1596. $y = \sqrt{x^2 - 2x + 8}$.

1597. $y = -x(x + 2a)$.

1598. $y = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

1599. $y = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

1600. $y = \sin x + \cos x$.

Найти абсолютные экстремумы данных функций в указанных интервалах (№ 1601—1603):

1601. $y = -2x^2 - 3x - 1$ в интервале $|x| \leqslant 2$.

1602. $y = |x^2 + 5x + 6|$ в интервале $[-5, 4]$.

1603. $y = \sin x - \cos x$ в интервале $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$.

1604. Найти абсолютные экстремумы функции

$$y = (x - 3)(x - 5)$$

в интервалах:

а) [2, 3]; в) [4, 5];
б) [3, 4]; г) [2, 5].

Четные и нечетные функции § 206

Функция $y = f(x)$ называется четной, если при всех значениях x из области определения этой функции

$$f(-x) = f(x).$$

Примерами четных функций могут служить хорошо изученные нами функции $y = x^2$, $y = \cos x$, $y = |x|$ и т. д.

Пусть точка M с координатами (a, b) принадлежит графику четной функции $y = f(x)$. Тогда $b = f(a)$. Так как функция $f(x)$ четна, то и $f(-a) = f(a) = b$. Но это означает, что наряду с точкой M (a, b) графику функции $y = f(x)$ должна принадлежать и точка N с координатами $(-a, b)$. Эти две точки симметричны друг другу относительно оси y (рис. 278).

Таким образом, какую бы точку графика четной функции мы ни взяли, на нем обязательно найдется точка, симметричная первой относительно оси y. Вот почему ***график четной функции представляет собой линию, симметричную относительно оси ординат*** (один из таких графиков показан на рис. 279).

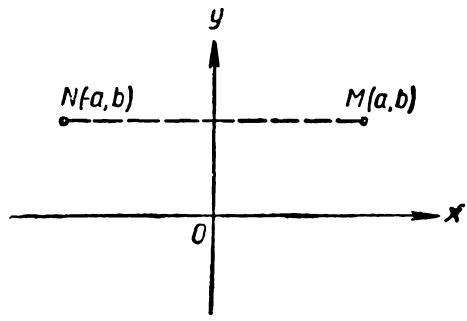

Рис. 278.

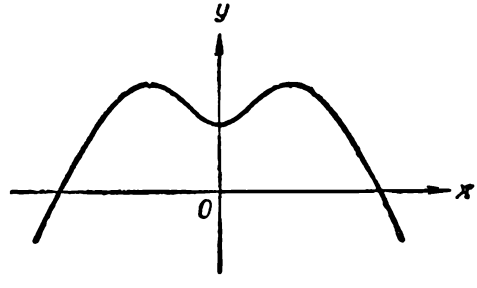

Рис. 279.

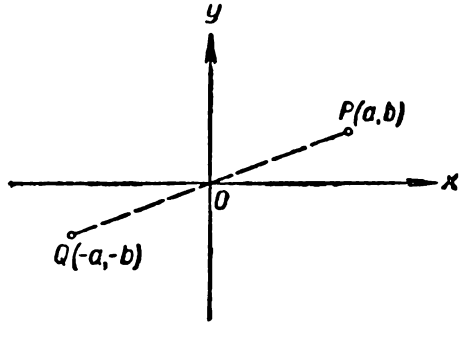

Рис. 280.

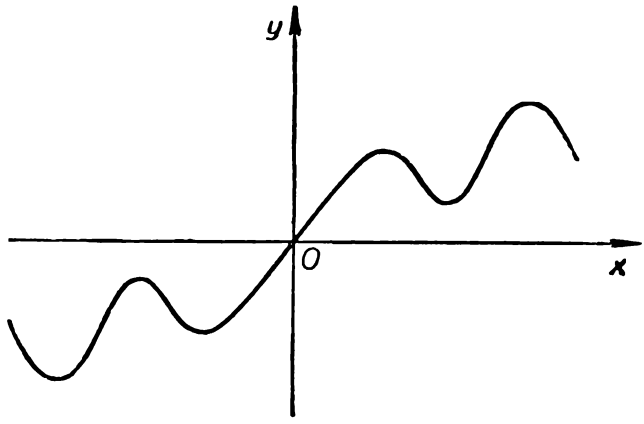

Рис. 281.

Функция $y = f(x)$ называется нечетной, если при всех значениях x из области определения этой функции

$$f(-x) = -f(x).$$

Примерами нечетных функций служат функции $y = x$, $y = x^3$, $y = \sin x$ и т. д.

Пусть точка P с координатами (a, b) принадлежит графику нечетной функции $y = f(x)$; тогда $b = f(a)$. Так как функция $f(x)$ нечетна, то $f(-a) = -f(a)$. Поэтому $f(-a) = -b$. Последнее равенство означает, что точка Q с координатами $(-a, -b)$ должна принадлежать графику функции $y = f(x)$. Итак, если точка P с координатами (a, b) принадлежит графику нечетной функции $y = f(x)$, то этому графику должна принадлежать и точка Q с координатами $(-a, -b)$ (рис. 280). Точки P и Q симметричны относительно начала координат (докажите это!).

Таким образом, какую бы точку графика нечетной функции мы ни взяли, на нем обязательно найдется другая точка, симметричная первой относительно начала координат. Вот почему ***график любой нечетной функции симметричен относительно начала координат*** (см., например, рис. 281).

Не следует думать, что всякая функция является либо четной, либо нечетной. Существует очень много функций, которые нельзя отнести ни к четным, ни к нечетным. Так, например, для функции $f(x) = x + x^2$ имеем: $f(-x) = -x + x^2$. Ни одно из двух тождеств $f(-x) = f(x)$ и $f(-x) = -f(x)$ не имеет места. Следовательно, данная функция не является ни четной, ни нечетной.

Кроме того, говорить о том, что функция $y = f(x)$ четна или нечетна, можно лишь в том случае, когда область определения этой функции является симметричной относительно начала координат. Это означает, что если функция определена при $x = a$, то

должна быть определена и при $x = -a$. В противном случае сравнивать выражения $f(x)$ и $f(-x)$ не имеет смысла. Например, функция $y = \lg x$ определена только для положительных значений аргумента. Поэтому одно из выражений $\lg x$ и $\lg(-x)$ наверняка не имеет смысла. Следовательно, говорить о том, является ли логарифмическая функция четной или нечетной, также не имеет смысла.

Упражнения

1605. (Устно.) Среди данных функций указать четные и нечетные:

1) $y = x^{100}$;
2) $y = x^{-3}$;
3) $y = \sqrt{x}$;
4) $y = \sqrt[3]{x}$;
5) $y = x^4 - 2x^2 + 3$;
6) $y = x^3 - 5x - 1$;
7) $y = \sin(x^2)$;
8) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$;
9) $y = \sin x + \operatorname{cosec} x$;
10) $y = x + \sin x$;
11) $y = 2^x + 2^{-x}$;
12) $y = \frac{\sin x}{x}$;
13) $y = \frac{\cos x}{x}$.

1606. Какие из данных функций являются четными и какие нечетными:

1) $y = 10^{-x} - 10^x$;
2) $y = \sin(-x)$;
3) $y = \cos(-x)$;
4) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;
5) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$;
6) $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$?

1607. Доказать, что сумма, разность, произведение и частное двух четных функций являются четными функциями.

1608. Доказать, что произведение и частное двух нечетных функций представляют собой четные функции.

1609. Может ли функция быть одновременно и четной и нечетной?

1610*. Что вы можете сказать о четности функции $f(x)$, если известно, что функция $|f(x)|$: а) четна; б) нечетна?

1611. Может ли монотонная на всей числовой прямой функция быть: а) четной; б) нечетной?

1612. Как достроить график четной функции $y = f(x)$, если он задан только при $x \geqslant 0$?

Функция $y = f(x)$ называется периодической, если существует число $T \neq 0$, такое, что при всех значениях x из области определения этой функции

$$f(x + T) = f(x).$$

Число T в этом случае называется *периодом* функции.

Периодическими являются, например, тригонометрические функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$. Их период равен 2π. Примером периодической нетригонометрической функции может служить функция $y = \{x\}$, которая каждому числу x ставит в соответствие его дробную часть*. Например, $\{3{,}56\} = 0{,}56$; $\{2{,}01\} = 0{,}01$ и т. д. Если к произвольному числу x прибавить 1, то изменится лишь целая часть этого числа; дробная же часть останется прежней. Следовательно, $\{x + 1\} = \{x\}$ и потому функция $y = \{x\}$ является периодической с периодом 1.

Из равенства $f(x + T) = f(x)$ следует, что все значения функции $y = f(x)$ повторяются с периодом T. Это находит свое отражение и в графическом изображении периодических функций. Так, например, в интервале $[0, 2\pi]$ синусоида имеет ту же самую форму, что и в интервалах $[2\pi, 4\pi]$, $[4\pi, 6\pi]$ и т. д. (рис. 282). На рисунке 283 представлен график функции $y = \{x\}$. Периодичность функции $y = \{x\}$ обусловливает то, что график ее в интервале $[0, 1]$ имеет ту же самую форму, что и в интервалах $[1, 2]$, $[2, 3]$ и т. д.

Если T — период функции $f(x)$, то $2T$, $3T$, $4T$ и т. д. также периоды этой функции.

Действительно,

$$f(x + 2T) = f[(x + T) + T] = f(x + T) = f(x),$$
$$f(x + 3T) = f[(x + 2T) + T] = f(x + 2T) = f(x)$$

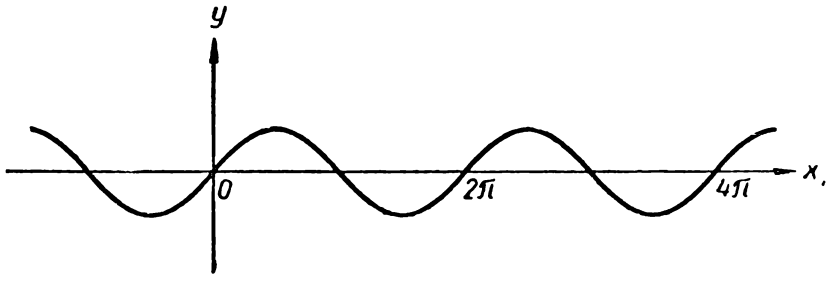

Рис. 282.

* О дробной части числа см. в главе VIII, § 187.

и т. д. Кроме того, периодом функции $f(x)$ можно считать и любое из чисел: $-T$, $-2T$, $-3T$ и т. д. В самом деле,
$f(x - T) = f[(x - T) + T] = f(x)$,
$f(x - 2T) = f[(x - 2T) + 2T] = f(x)$
и т. д. Итак, если число T есть период функции $f(x)$, то при любом целом n число nT также период этой функции. Поэтому ***всякая периодическая функция имеет бесконечное множество периодов.*** Например, периодом функции $y = \sin x$ можно считать любое из чисел: 2π, 4π, 6π, -2π, -4π, а периодом функции $y = \{x\}$ — любое из чисел 1, 2, 3, —1, —2, —3 и т. д.

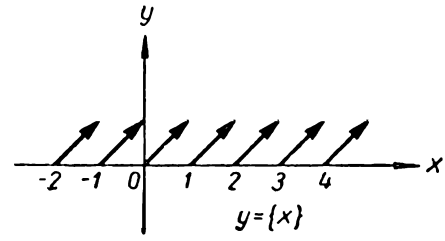

Рис. 283.

Говоря о периоде функции $y = f(x)$, обычно имеют в виду *наименьший положительный период*. Так, мы говорим, что периодом функции $y = \sin x$ является число 2π, периодом функции $y = \operatorname{tg} x$ — число π, периодом функции $\{x\}$ — число 1 и т. д.

Следует, однако, иметь в виду, что наименьшего положительного периода у периодической функции может и не быть. Например, для функции $f(x) = 3$ (рис. 284) любое действительное число является периодом. Но среди положительных действительных чисел не существует наименьшего. Поэтому и функция $f(x) = 3$, имея бесконечное множество периодов, не имеет наименьшего положительного периода.

Упражнения

Для каждой из данных функций (№ 1613—1621) найти наименьший положительный период:

1613 $y = \sin 2x$.

1614. $y = \cos \frac{x}{2}$.

1615. $y = \operatorname{tg} 3x$.

1616. $y = \cos(1 - 2x)$.

1617. $y = \sin x \cos x$.

1618. $y = \operatorname{ctg} \frac{x}{3}$.

1619. $y = \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$.

1620. $y = \sin^2 x$.

1621. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

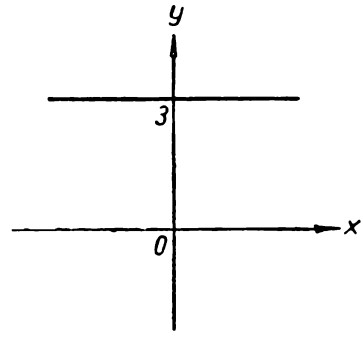

Рис. 284.

1622. Доказать, что сумма и произведение двух функций, периодических с одним и тем же периодом T, являются функциями, периодическими с периодом T.

1623*. Докажите, что функция $y = \sin x + \{x\}$, являющаяся суммой двух

периодических функций $y = \sin x$ и $y = \{x\}$, сама не является периодической.

Не противоречит ли это результату предыдущей задачи?

1624. Как достроить график функции $y = f(x)$, периодической с периодом T, если он задан лишь в интервале $[0, T]$?

Обратные функции § 208

Каждому допустимому значению переменной величины x равенство $y = f(x)$ ставит в соответствие вполне определенное значение переменной величины y. Однако в некоторых случаях соотношение $y = f(x)$ можно рассматривать и как такое равенство, которое каждому допустимому значению переменной величины y ставит в соответствие вполне определенное значение переменной величины x. Поясним это на конкретных примерах.

Пример 1. Равенство $y = 2x - 1$ каждому значению y ставит в соответствии следующее значение x: $x = \frac{y+1}{2}$. Например, при $y = 1$ $x = 1$; при $y = 2$ $x = 1{,}5$; при $y = 3$ $x = 2$ и т. д. Поэтому можно сказать, что равенство $y = 2x - 1$ определяет x как некоторую функцию переменной величины y. В явном виде эта функция записывается таким образом: $x = \frac{y+1}{2}$.

Пример 2. Равенство $y = 2^x$ каждому положительному значению y ставит в соответствие следующее значение x: $x = \log_2 y$. Например, при $y = 1$ $x = \log_2 1 = 0$; при $y = 2$ $x = \log_2 2 = 1$; при $y = 3$ $x = \log_2 3$ и т. д. Следовательно, равенство $y = 2^x$ определяет x как некоторую функцию переменной величины y. В явном виде эта функция записывается таким образом: $x = \log_2 y$.

Пример 3. При $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ равенство $y = \sin x$ каждому значению y, заключенному в интервале от -1 до $+1$, ставит в соответствие число x, равное $\arcsin y$. Например, при $y = -1$ $x = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$; при $y = 0$ $x = \arcsin 0 = 0$; при $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $x = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$ и т. д. Следовательно, равенство $y = \sin x$ при дополнительном условии, что $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, определяет x как некоторую функцию переменной величины y. В явном виде эту функцию можно записать следующим образом:

$$x = \arcsin y.$$

Вообще, пусть, исходя из равенства $y = f(x)$, по каждому допустимому значению величины y можно восстановить о д н о и т о л ь к о о д н о значение величины x. Тогда это равенство

определяет x как некоторую функцию от y. Обозначим эту функцию буквой φ: $x = \varphi(y)$.

В этой формуле y выступает в роли аргумента, а x — в роли функции. Вошло в обычай букву x употреблять для обозначения аргумента, а букву y — для обозначения функции. Поэтому ту функциональную зависимость, которая обозначена буквой φ, мы перепишем в виде:

$$y = \varphi(x).$$

Так определенная функция $y = \varphi(x)$ называется *обратной* по отношению к функции

$$y = f(x).$$

Примеры. 1) Исходя из равенства $y = 2x - 1$, мы получили $x = \frac{y+1}{2}$. Поэтому функция $y = \frac{x+1}{2}$ является обратной к функции $y = 2x - 1$.

2) Исходя из равенства $y = 2^x$, мы получили $x = \log_2 y$. Поэтому функция $y = \log_2 x$ является обратной к функции $y = 2^x$.

3) Исходя из равенства $y = \sin x$ при $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, мы получили $x = \arcsin y$. Поэтому функция $y = \arcsin x$ является обратной к функции $y = \sin x$, рассматриваемой на интервале

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Отметим, что область определения и область изменения функции $y = f(x)$ и обратной к ней функции $y = \varphi(x)$ как бы меняются ролями. То, что для функции $y = f(x)$ было областью определения, для обратной функции $y = \varphi(x)$ становится областью изменения, а то, что для функции $y = f(x)$ было областью изменения, для обратной функции $y = \varphi(x)$ становится областью определения. Так, например, для функции $y = 2^x$ областью определения является совокупность всех действительных чисел, а областью изменения — совокупность всех положительных чисел. Для обратной к ней функции $y = \log_2 x$, наоборот, совокупность всех положительных чисел является областью определения, а совокупность всех действительных чисел — областью изменения.

Для любой ли функции $y = f(x)$ существует обратная функция $y = \varphi(x)$? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим два примера.

Пример 1. Каждому значению y по формуле $y = x^2$ соответствует два значения x; например, значению $y = 1$ соответствуют значения $x = +1$ и $x = -1$; значению $y = 4$ соответствуют значения $x = 2$ и $x = -2$ и т. д. Поэтому если функцию $y = x^2$ рассматривать на всей числовой прямой (или при всех действи-

тельных значениях x), то она не будет иметь обратной функции. Однако если эту функцию рассматривать только при положительных значениях x, то она будет обладать обратной функцией. По значению квадрата положительного числа это число восстанавливается однозначно. Обратную функцию в данном случае можно записать в виде $y = \sqrt{x}$.

Пример 2. Каждому значению величины y, заключенному в интервале от -1 до 1, по формуле $y = \sin x$ соответствует бесконечное множество значений x. Например, при $y = 0$ такими значениями x являются 0, π, 2π, 3π и т. д.; при $y = 1$ $x = \frac{\pi}{2}$, $\frac{5}{2}\pi$, $\frac{9}{2}\pi$ и т. д. Поэтому если функцию $y = \sin x$ рассматривать на всей числовой прямой (или при всех действительных значениях x), то она не будет иметь обратной функции. Если же эту функцию рассматривать только при $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, то по значениям y значения x восстанавливаются однозначно. Следовательно, при $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ функция $y = \sin x$ имеет обратную функцию $y = \arcsin x$.

Нетрудно подметить то общее, что делали мы в обоих примерах при нахождении функций, обратных к данным. Для каждой из данных функций мы выделяли интервал, в котором она является монотонной. Можно доказать общее утверждение: ***если функция $f(x)$ монотонно возрастает (или убывает) в интервале $[a, b]$, то при $a \leqslant x \leqslant b$ существует обратная к ней функция.***

Упражнения

В упражнениях № 1625—1628 найти функции, обратные к данным. Указать области определения и области изменения данных и обратных к ним функций:

1625. $y = x^3$. **1626.** $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. **1627.** $y = \frac{1-x}{1+x}$. **1628.** $y = x^2 (x < 0)$.

1629. Доказать, что при $a \neq 0$ функция, обратная к линейной функции $y = ax + b$, есть функция линейная.

1630. Доказать, что функция, обратная к дробно-линейной функции $y = \frac{ax+b}{cx+d} (ad - bc \neq 0)$, сама является дробно-линейной.

1631. Какому условию должны удовлетворять числа a, b, c и d, чтобы дробно-линейная функция $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ была тождественно равна обратной к ней функции?

Приведите несколько примеров.

1632. Существует ли функция, обратная к функции $y = \cos x$ в интервале:

а) $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$; б) $0 \leqslant x \leqslant \pi$; в) $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\pi$?

1633. Существует ли функция, обратная к функции $y = \operatorname{tg} x$ в интервале:

а) $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$; б) $0 \leqslant x < \pi$; в) $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\pi$?

1634. Существует ли функция, обратная к функции $y = \{x\}$ в интервале:

а) $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$; б) $0 \leqslant x \leqslant 1$; в) $0 \leqslant x < 1$; г) $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}$?

Взаимное расположение графиков прямой и обратной функции § 209

В этом параграфе мы рассмотрим вопрос о взаимном расположении графика функции $y = f(x)$ и графика обратной к ней функции $y = \varphi(x)$. Для этого нам потребуется следующая лемма.

Лемма. ***Точки плоскости с координатами (a, b) и (b, a) симметричны друг другу относительно биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов.***

Доказательство. Пусть точка P имеет координаты (a, b), а точка Q — координаты (b, a) (рис. 285). Опустим из этих точек перпендикуляры на оси координат. В результате получим:

$$OA = OD = a; \qquad OB = OC = b.$$

Перегнем чертеж по прямой OM — биссектрисе 1-го и 3-го координатных углов. Тогда ось y пойдет по оси x, так как $\angle MOB = \angle MOC$. Точка B совместится с точкой C, поскольку $OB = OC$, а BP пойдет по CQ, так как через точку C можно провести лишь одну прямую, перпендикулярную оси x. А в силу того, что $BP = CQ$, точка P совпадет с точкой Q.

Таким образом, если перегнуть чертеж по биссектрисе OM, то точки P и Q совпадут. А это и означает, что они симметричны друг другу относительно биссектрисы OM.

Лемма доказана.

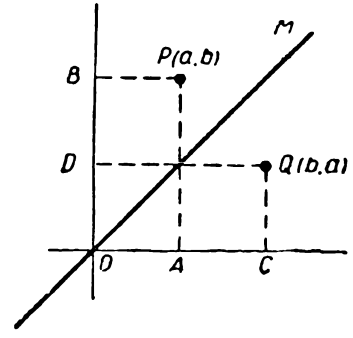

Рис. 285.

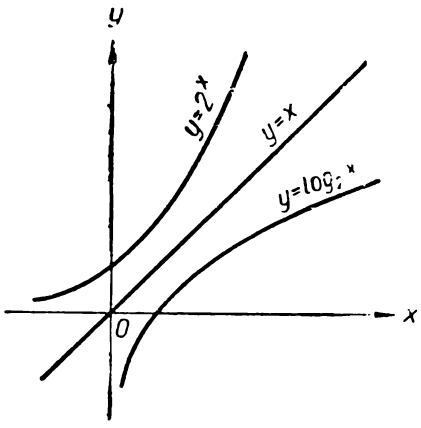

Рис. 286.

Пусть теперь точка P с координатами (a, b) принадлежит графику функции $y = f(x)$. Тогда значению $y = b$ равенство $y = f(x)$ ставит в соответствие значение $x = a$. Но это означает, что точка Q с координатами (b, a) должна принадлежать графику обратной функции $y = \varphi(x)$.

Итак, если точка P с координатами (a, b) принадлежит графику функции $y = f(x)$, то точка Q с координатами (b, a) должна принадлежать графику обратной функции $y = \varphi(x)$. Эти точки симметричны относительно биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов.

Таким образом, какую бы точку P на графике функции $y = f(x)$ мы ни взяли, на графике обратной к ней функции $y = \varphi(x)$ обязательно найдется точка Q, симметричная точке P относительно биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов. Вот почему ***графики взаимно обратных функций симметричны друг другу относительно биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов*** (см., например, рис. 286, на котором представлены графики взаимно обратных функций $y = 2^x$ и $y = \log_2 x$).

Упражнения

На одном и том же чертеже построить графики данной и обратной к ней функций (№ 1635—1641):

1635. $y = x^2$ $(x \geqslant 0)$.

1636. $y = \frac{1}{3}x + 1$.

1637. $y = \begin{cases} x, & \text{если } x < 0, \\ 2x, & \text{если } x \geqslant 0. \end{cases}$

1638. $y = \sqrt{1 - x}$.

1639. $y = \begin{cases} 0{,}5x + 2, & \text{если } x \geqslant 0, \\ 2x + 2, & \text{если } x < 0. \end{cases}$

1640. $y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \geqslant 0, \\ x^3, & \text{если } x < 0. \end{cases}$

1641. $y = \sin x \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$.

1642. Каковы особенности графика функции $y = f(x)$, если эта функция тождественно равна обратной к ней функции?

Ответ пояснить примерами (см., например, задачу № 1631).

Краткий обзор свойств и графиков ранее изученных функций § 210

В этом параграфе мы дадим краткий обзор свойств и графиков ранее изученных функций. При этом мы будем придерживаться следующего плана: 1) область определения функции;

2) область изменения функции; 3) четность функции; 4) периодичность функции; 5) интервалы знакопостоянства; 6) нули функции, то есть те значения аргумента, при которых функция обращается в нуль; 7) монотонность функции; 8) локальные экстремумы функции; 9) поведение функции вблизи «особых» точек (например, функции $y = \frac{1}{x}$ вблизи точки $x = 0$).

Впрочем, порядок этот не является обязательным и в некоторых случаях для пользы дела может быть смело изменен. Отметим лишь, что осуществление каждого пункта плана всегда полезно сопровождать геометрической интерпретацией на графике исследуемой функции.

1. Квадратная функция

$$y = ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0)$$

Эта функция определена для всех значений x, так что областью ее определения служит совокупность всех действительных чисел. Графиком квадратной функции служит парабола, вершина которой имеет координаты $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$. При $a > 0$ парабола направлена вверх (рис. 287), а при $a < 0$ — вниз (рис. 288). Если $a > 0$, то областью изменения данной функции является совокупность всех чисел, больших или равных $-\frac{b^2-4ac}{4a}$; если же $a < 0$, то областью изменения ее служит множество всех чисел, меньших или равных $-\frac{b^2-4ac}{4a}$.

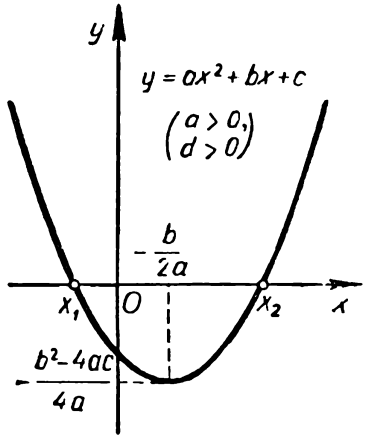

Рис 287.

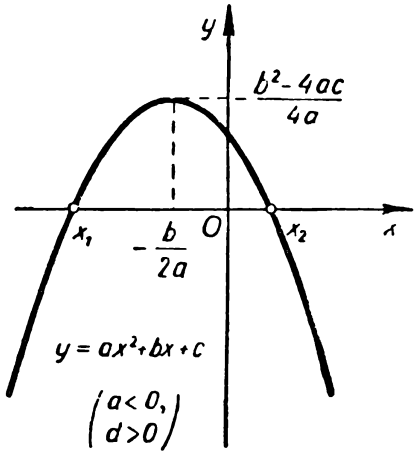

Рис 288.

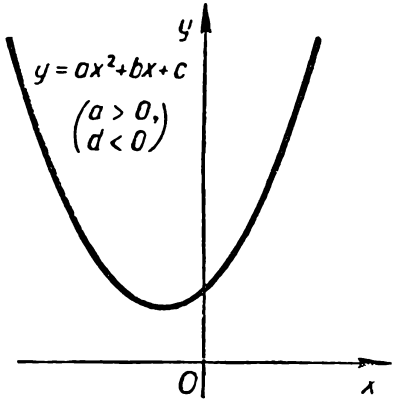

Рис. 289.

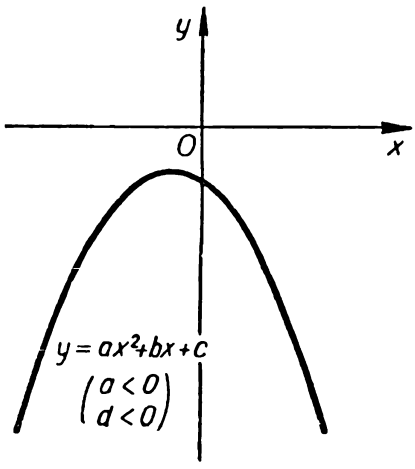

Рис. 290

При $b \neq 0$ функция $y = ax^2 + bx + c$ не будет ни четной, ни нечетной, поскольку ни одно из равенств

$$ax^2 - bx + c = ax^2 + bx + c, \quad [f(-x) = f(x)]$$

и

$$ax^2 - bx + c = -(ax^2 + bx + c), \quad [f(-x) = -f(x)]$$

не выполняется тождественно. При $b = 0$ квадратная функция принимает вид $y = ax^2 + c$ и потому является четной функцией.

Данная функция непериодична. Если дискриминант

$$d = b^2 - 4ac$$

отрицателен, то функция не имеет нулей. В этом случае все ее значения имеют один и тот же знак — знак коэффициента a (см. рис. 289 для $a > 0$ и рис. 290 для $a < 0$). Если дискриминант d положителен, то функция имеет два нуля:

$$\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ и } \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Если к тому же $a > 0$, то функция положительна при $x < x_1$ и $x > x_2$, а отрицательна при $x_1 < x < x_2$ (см. рис. 287). В случае, когда $d > 0$, а $a < 0$, функция положительна при $x_1 < x < x_2$, а отрицательна при $x < x_1$ и $x > x_2$ (см. рис. 288).

Наконец, возможен и случай, когда $d = 0$. Тогда квадратная функция имеет единственный нуль

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

При всех значениях $x \neq -\frac{b}{2a}$ она сохраняет один и тот же знак — знак коэффициента a.

В случае, когда $a > 0$, квадратная функция $y = ax^2 + bx + c$ монотонно убывает при $x < -\frac{b}{2a}$ и монотонно возрастает при $x > -\frac{b}{2a}$ (см. рис. 287 и рис. 289). В случае, когда $a < 0$, она, наоборот, монотонно возрастает при $x < -\frac{b}{2a}$ и монотонно убывает при $x > -\frac{b}{2a}$ (см. рис. 288 и рис. 290).

Данная функция имеет единственный локальный экстремум

$$y_{\text{экстр}} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Этот экстремум достигается при $x = -\frac{b}{2a}$ и является минимумом при $a > 0$ (рис. 287 и рис. 289) и максимумом при $a < 0$ (рис. 288 и рис. 290).

2. Степенная функция $y = x^r$

Область определения такой функции зависит от r. Например, при $r = 1$ ($y = x$) это будет совокупность всех действительных чисел, при $r = \frac{1}{2}$ ($y = \sqrt{x}$) — совокупность неотрицательных чисел, при $r = 0$ ($y = x^0$) — совокупность всех чисел, кроме 0. Для положительных значений x функция $y = x^r$ определена всегда, независимо от того, чему равно r.

Область изменения функции $y = x^r$ также зависит от r. Например, функция $y = x$ ($r = 1$) может принимать все действительные значения, функция $y = x^2$ ($r = 2$) — только неотрицательные значения, а функция $y = x^0$ ($r = 0$) — лишь одно значение, равное 1.

Среди степенных функций есть четные и нечетные. Например, функции $y = x^2$, $y = x^4$ — четные, а функции $y = x^3$, $y = x^{-3}$ — нечетные. Некоторые степенные функции (например, $y = \sqrt{x}$) определены лишь для неотрицательных значений аргумента. Для них ставить вопрос о четности не имеет смысла.

Степенная функция $y = x^r$ непериодична.

При $x > 0$ степенная функция $y = x^r$ независимо от r положительна.

Некоторые степенные функции (например, $y = \frac{1}{x}$,

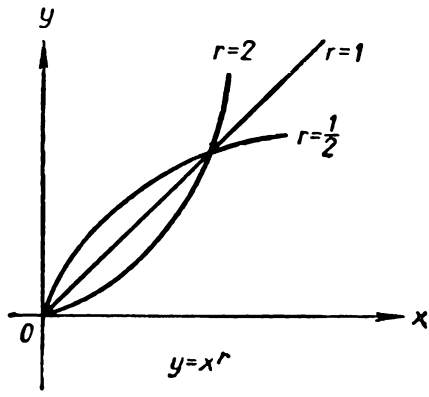

Рис. 291.

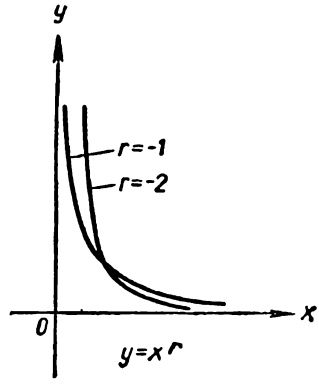

Рис. 292.

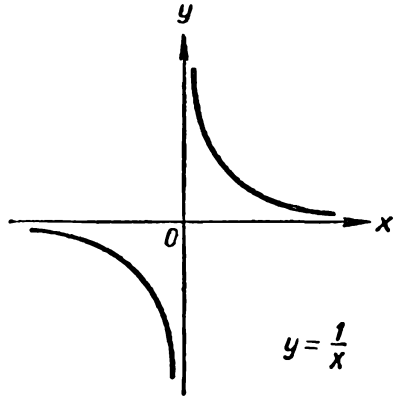

Рис 293.

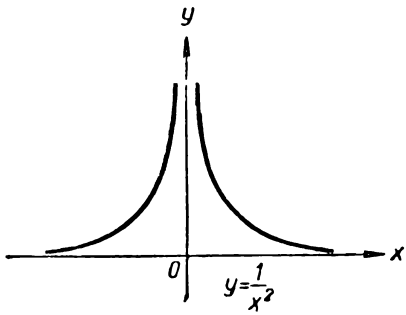

Рис 294

$y = x^{-\frac{3}{2}}$) не имеют нулей, для других же нулем является число 0 (например, для функций $y = \sqrt{x}$, $y = x^3$ и т. д.).

Если число r положительно, то при $x > 0$ степенная функция $y = x^r$ монотонно возрастает (рис. 291). Если же r отрицательно, то при $x > 0$ степенная функция $y = x^r$ монотонно убывает (рис. 292).

Некоторые степенные функции, например $y = x^2$, $y = x^4$, имеют локальный минимум в точке $x = 0$.

Отметим еще поведение функций $y = \frac{1}{x}$ и $y = \frac{1}{x^2}$ вблизи точки $x = 0$. Когда x стремится к нулю, оставаясь положительным, функция $y = \frac{1}{x}$ неограниченно возрастает. Когда же x стремится к нулю, оставаясь отрицательным, она неограниченно убывает (рис. 293).

Функция $y = \frac{1}{x^2}$ при приближении x к нулю (как слева, так и справа) неограниченно возрастает (рис. 294).

3. Тригонометрические функции

Из тригонометрических функций мы рассмотрим лишь две функции: $y = \sin x$ и $y = \operatorname{tg} x$.

Областью определения функции $y = \sin x$ является совокупность всех действительных чисел, а областью изменения — совокупность всех чисел, заключенных в интервале $[-1, 1]$ Функция является нечетной и периодической с периодом 2π. В интервалах $2n\pi < x < \pi + 2n\pi$ эта функция положительна, а в интервалах $\pi + 2n\pi < x < 2\pi + 2n\pi$ отрицательна (рис. 295). При $x = n\pi$ она обращается в нуль. В интервалах $-\frac{\pi}{2} + 2n\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ функция монотонно возрастает, а в интервалах $\frac{\pi}{2} + 2n\pi < x < \frac{3}{2}\pi + 2n\pi$ монотонно убывает.

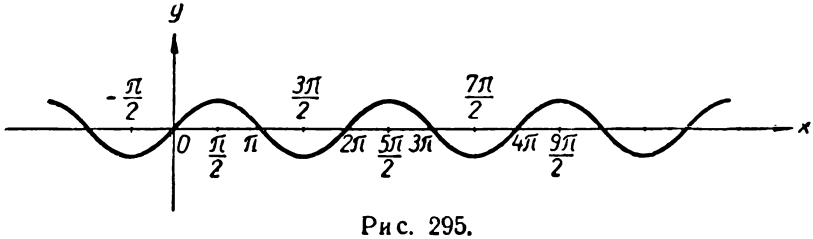

Рис. 295.

Точки $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ являются точками локального максимума функции $y = \sin x$. В них она принимает наибольшие значения, равные 1. Точки $x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ являются точками локального минимума. В них функция принимает наименьшие значения, равные -1.

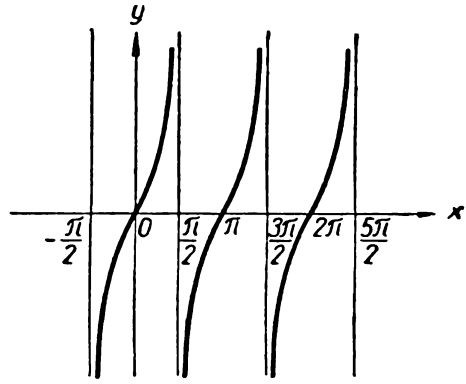

Рис. 296

Функция $y = \operatorname{tg} x$ определена при всех значениях x, кроме $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$. Областью ее изменения является совокупность всех действительных чисел. Эта функция нечетна и периодична с периодом π (рис. 296). В интервалах $n\pi < x < \frac{\pi}{2} + n\pi$ она положительна, а в интервалах $-\frac{\pi}{2} + n\pi < x < n\pi$ отрицательна. При $x = n\pi$ функция обращается в нуль. В каждом интервале, не содержащем точек $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, эта функция монотонно возрастает. Локальных экстремумов функция не имеет. Когда значения x неограниченно приближаются к $\frac{\pi}{2} + n\pi$, оставаясь меньше $\frac{\pi}{2} + n\pi$, значения функции $y = \operatorname{tg} x$ неограниченно возрастают. Когда же значения x неограниченно приближаются к $\frac{\pi}{2} + n\pi$, оставаясь больше этих значений, функция $y = \operatorname{tg} x$ неограниченно убывает.

4. Показательная функция $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$

Областью определения этой функции является совокупность всех действительных чисел, а областью изменения — совокупность всех положительных чисел. Функция не является ни четной, ни нечетной. Не является она и периодической. При всех значениях аргумента x эта функция положительна. При $a > 1$ показательная функция $y = a^x$ является монотонно возрастающей (рис. 297), а при $a < 1$ — монотонно убывающей (рис. 298). Точек локальных экстремумов функция не имеет.

5. Логарифмическая функция $y = \log a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$

Областью определения этой функции является совокупность всех положительных чисел, а областью изменения — совокупность всех действительных чисел. О четности или нечетности этой функции говорить не имеет смысла. Функция не является периодической. Если $a > 1$, то при $x > 1$ функция положительна, а

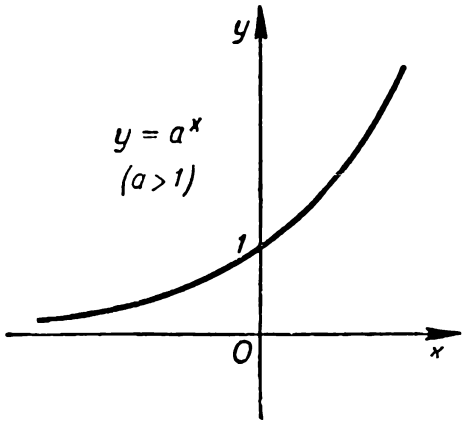

Рис 297.

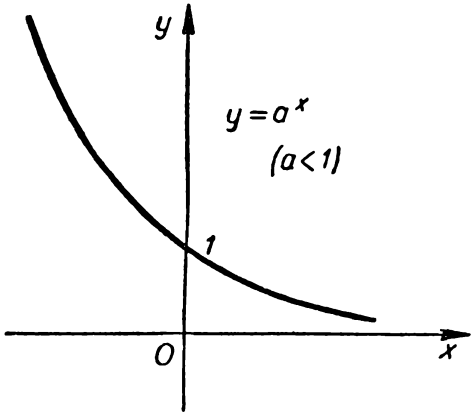

Рис. 298.

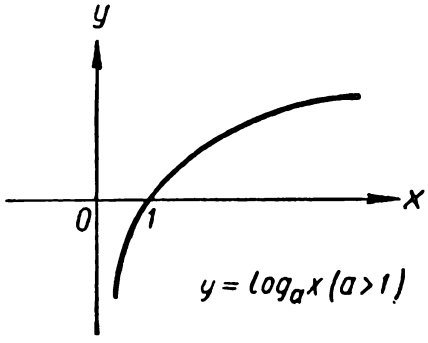

Рис 299.

при $x < 1$ отрицательна (рис. 299). Если же $a < 1$, то, наоборот, при $x > 1$ функция отрицательна, а при $x < 1$ положительна (рис. 300). Единственным нулем логарифмической функции является точка $x = 1$. При $a > 1$ эта функция является монотонно возрастающей (рис. 299), а при $a < 1$ — монотонно убывающей (рис. 300). Локальных экстремумов функция не имеет. Если $a > 1$, то при приближении x к нулю функция неограниченно убывает; если же $a < 1$, то при приближении x к нулю функция неограниченно возрастает.

Упражнения

По плану, описанному в данном параграфе, исследовать функции (№ 1643—1652):

1643. $y = \sin^2 x$.

1644. $y = \sin 2x$.

1645. $y = -|\cos x|$.

1646. $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

1647. $y = \lg\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

1648. $y = x^2 - 4x + 5$.

1649. $y = x^2 + x - 7$.

1650. $y = 1 + x - 2x^2$.

1651. $y = x\sqrt{x}$.

1652. $y = \frac{1+x}{1-x}$.

Предел функции § 211

Прежде чем дать общее определение предела функции, рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Пусть $f(x) = x^2$. Если аргумент x пробегает ряд значений, сходящихся к числу 2,

то функция $f(x)$ будет пробегать ряд значений, сходящихся к числу 4. Это можно заметить, рассматривая таблицу приближенных значений функции $|x^2 - 4|$:

x	1,96	1,97	1,98	1,99	2,00	2,01	2,02
x^2 (приближенно)	3,84	3,88	3,92	3,96	4,00	4,04	4,08
$\|x^2 - 4\|$ (приближенно)	0,16	0,12	0,08	0,04	0	0,04	0,08

Чем ближе значение аргумента x к 2, тем меньше абсолютная величина разности $x^2 - 4$.

В этом можно убедиться и строго математически, не обращаясь к табличной иллюстрации. Докажем, что, какое бы малое положительное число ε мы ни взяли, всегда можно указать такой интервал, содержащий внутри себя точку $x = 2$, что для всех точек этого интервала будет выполняться неравенство $|x^2 - 4| < \varepsilon$.

Действительно, неравенство $|x^2 - 4| < \varepsilon$ эквивалентно двойному неравенству

$$-\varepsilon < x^2 - 4 < \varepsilon,$$

откуда получаем:

$$4 - \varepsilon < x^2 < 4 + \varepsilon,$$

$$\sqrt{4-\varepsilon} < x < \sqrt{4+\varepsilon}.$$

(Мы учитываем только положительные значения x, поскольку поведение функции $y = x^2$ нас интересует сейчас лишь вблизи точки $x = 2$.)

Итак, неравенство $|x^2 - 4| < \varepsilon$ выполняется в интервале $\sqrt{4-\varepsilon} < x < \sqrt{4+\varepsilon}$, который содержит внутри себя точку $x = 2$.

Например, неравенство $|x^2 - 4| < 0{,}1$ ($\varepsilon = 0{,}1$) выполняется в интервале $\sqrt{3{,}9} < x < \sqrt{4{,}1}$, или $1{,}98 < x < 2{,}02$; неравенство $|x^2 - 4| < 0{,}01$($\varepsilon = 0{,}01$) выполняется в интервале $\sqrt{3{,}99} < x < \sqrt{4{,}01}$, или $1{,}998 < x < 2{,}002$.

Интервал $(\sqrt{4-\varepsilon}, \sqrt{4+\varepsilon})$ можно было бы построить и геометрически. Пусть A есть точка графика функции $y = x^2$ с абсциссой $x = 2$ (рис. 301). По обе стороны от этой точки проведем горизонтальные прямые, отстоящие от A на расстоянии ε. Эти прямые пересекают правую часть параболы $y = x^2$ в

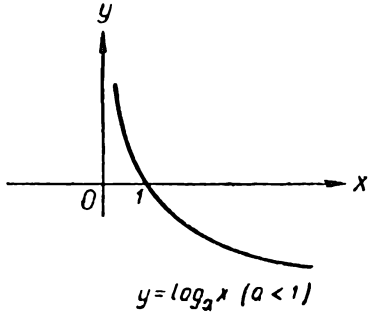

Рис. 300.

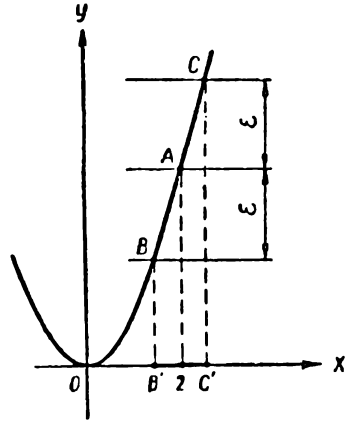

Рис. 301.

точках B и C. Опуская из них перпендикуляры на ось абсцисс, получим отрезок $B'C'$. Этот отрезок и представляет собой интервал $(\sqrt{4-\varepsilon}, \sqrt{4+\varepsilon})$, который раньше мы получили алгебраически.

Итак, если значения аргумента x выбирать достаточно близкими к 2, то значения функции $y = x^2$ будут как угодно мало отличаться от 4. Можно, например, добиться, чтобы выполнялись неравенства

$$\begin{array}{l} |x^2 - 4| < 0{,}001; \\ |x^2 - 4| < 0{,}0001 \end{array}$$

и т. д. Число 4 в таком случае естественно назвать *пределом функции* $y = x^2$ *при* x, *стремящемся к* 2.

Пример 2. Рассмотрим таблицу значений функции $y = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ вблизи точки $x = 3$.

x	2,94	2,96	2,98	3	3,02	3,04	3,06
$y = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$	5,94	5,96	5,98	Функция не определена	6,02	6,04	6,06

При $x = 3$ наша функция не определена: числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль. Если же значения x выбирать достаточно близкими к 3 (но не равными 3), то соответствующие значения y будут сколь угодно близки к 6.

Не ограничиваясь табличной иллюстрацией, докажем этот факт строго математически, а именно: покажем, что для любого положительного числа ε, как бы мало оно ни было, можно указать такой интервал, содержащий точку $x = 3$, что всюду внутри него, за исключением самой точки $x = 3$, будет выполняться неравенство

$$|y - 6| < \varepsilon. \qquad (1)$$

Действительно, если $x \neq 3$, то

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = x + 3.$$

Поэтому неравенство (1) сводится к такому неравенству:

$$|x + 3 - 6| < \varepsilon,$$

или

$$|x - 3| < \varepsilon.$$

Последнее неравенство эквивалентно двойному неравенству

$$-\varepsilon < x - 3 < \varepsilon,$$

откуда получаем:

$$3 - \varepsilon < x < 3 + \varepsilon.$$

Таким образом, неравенство (1) выполняется для всех значений x, заключенных в интервале от $3 - \varepsilon$ до $3 + \varepsilon$, кроме значения $x = 3$.

Если, например, мы хотим, чтобы значение y отличалось от 6 меньше, чем на $\varepsilon = 0{,}01$, то должны рассматривать значения x в интервале от $3 - 0{,}01$ до $3 + 0{,}01$, то есть в интервале (2,99; 3,01). Аналогично, при $\varepsilon = 0{,}001$ мы получили бы интервал $(3 - 0{,}001; 3 + 0{,}001)$, или (2,999; 3,001) и т. д.

Интервал $3 - \varepsilon < x < 3 + \varepsilon$ можно было бы построить и геометрически. Это построение вполне аналогично тому, которое мы делали при рассмотрении примера 1. Поэтому мы ограничимся лишь тем, что приведем соответствующий рисунок (рис. 302), предлагая учащимся самостоятельно в нем разобраться.

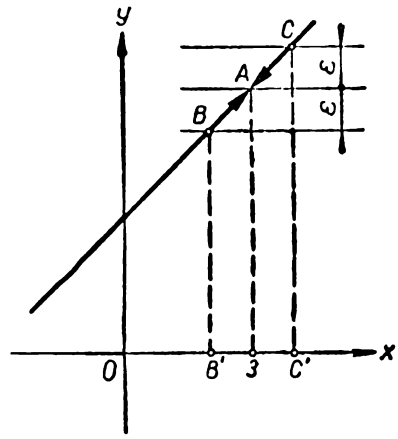

Рис. 302.

Итак, если значения аргумента x выбирать достаточно близкими к 3, но не равными 3, то значения функции $f(x)$ будут сколь угодно мало отличаться от 6. Можно, например, добиться, чтобы величина $|y - 6|$ была меньше 0,1; 0,01; 0,001 и т. д. Несмотря на то что рассматриваемая функция не определена при $x = 3$, естественно считать, что предел ее при $x \to 3$ существует и равен 6.

Рассмотрев примеры, мы приходим к следующему определению предела функции.

Число b называется пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к a, если для любого положительного числа ε можно указать такой открытый интервал, содержащий точку $x = a$, что всюду внутри него, за исключением, быть может, самой точки $x = a$, будет выполняться неравенство

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

Тот факт, что предел функции $f(x)$ при x, стремящемся к a, равен b, записывается следующим образом:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

(читается: предел $f(x)$ при x, стремящемся к a, равен b).

Например,

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4; \qquad \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6.$$

Упражнения

Исходя из определения предела, доказать следующие соотношения (№ 1653—1658):

1653. $\lim\limits_{x \to 0} (3x + 5) = 5.$

1654. $\lim\limits_{x \to 8} \sqrt[3]{x} = 2.$

1655. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{x^2 - 0{,}25}{x - 0{,}5} = 1.$

1656. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = 2.$

1657. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - x - 6}{x + 2} = -5.$

1658*. $\lim\limits_{x \to 0} 10^x = 1.$

1659. Почему при нахождении пределов некоторых дробей (см., например, упр. № 1655—1657) возможно сокращение этих дробей? Ведь то выражение, на которое мы сокращаем, может обратиться в нуль.

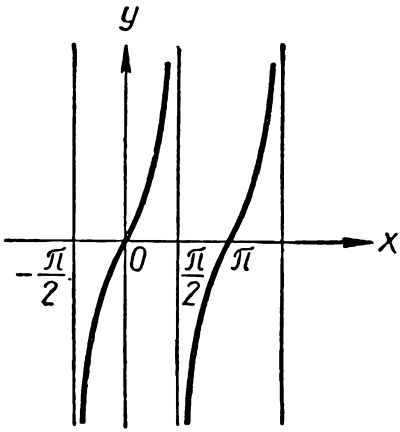

Рис 303.

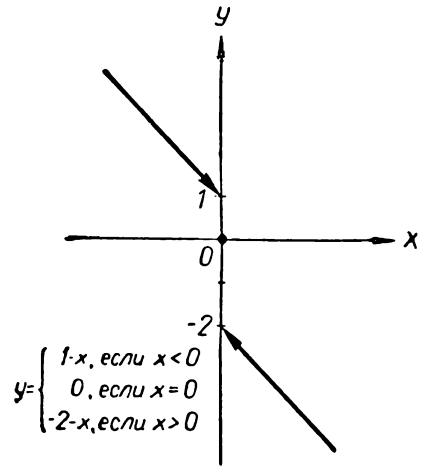

Рис. 304.

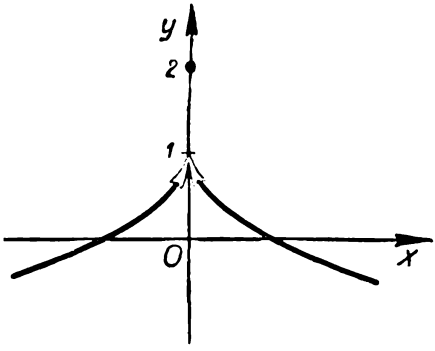

Рис. 305.

Основные теоремы о пределах функций § 212

Прежде всего заметим, что не для всякой функции $y = f(x)$ существует предел $\lim\limits_{x \to a} f(x)$. Так, например, при $x \to \frac{\pi}{2}$ значения функции $y = \operatorname{tg} x$ (рис. 303) или неограниченно растут $\left(\text{при } x < \frac{\pi}{2}\right)$, или неограниченно убывают $\left(\text{при } x > \frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому нельзя указать никакого числа b, к которому стремились бы значения этой функции.

Другой пример. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{если } x < 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -2 - x, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

График этой функции представлен на рисунке 304. Когда значения аргумента x приближаются к 0, оставаясь отрицательными, соответствующие значения функции стремятся к 1. Когда значения аргумента x приближаются к 0, оставаясь положительными, соответствующие значения функции стремятся к -2. В самой же точке $x = 0$ функция обращается в 0. Очевидно, что указать одно какое-нибудь число, к которому стремились бы все значения y при приближении x к 0, нельзя. Поэтому данная функция не имеет предела при $x \to 0$.

Говоря в дальнейшем о пределе функции, мы всегда будем предполагать, что этот предел существует.

(Предположение о существовании предела $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ еще не означает, что этот предел совпадает со значением функции $f(x)$ в точке $x = a$. Для примера рассмотрим функцию, график которой представлен на рисунке 305. Очевидно, что предел $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ существует и равен 1. Но в самой точке $x = 0$ функция принимает значение, равное 2. Поэтому в данном случае

$$\lim_{x \to 0} f(x) \neq f(0).$$

Если функция $y = f(x)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

то она называется *непрерывной в точке* $x = a$. Если же указанное условие не выполняется, то функция $f(x)$ называется *разрывной в точке* $x = a$.

Все элементарные функции (например, $y = x^n$, $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x$ и т. д.) непрерывны в каждой точке, в которой они определены.

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в интервале* $[a, b]$, если она непрерывна в каждой точке этого интервала. Например, функция $y = \operatorname{tg} x$ непрерывна в интервале $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ непрерывны в любом интервале и т. д.

Приведем без доказательства основные теоремы о пределах функций. Эти теоремы вполне аналогичны тем, которые мы рассматривали (также без доказательства) ранее при изучении пределов числовых последовательностей.

1. ***Предел константы равен самой этой константе:***

$$\lim_{x \to a} c = c.$$

2. ***Постоянный множитель можно выносить за знак предела:***

$$\lim_{x \to a} [k \cdot f(x)] = k \cdot \lim_{x \to a} f(x).$$

3. ***Предел суммы (разности) функций равен сумме (разности) пределов этих функций:***

$$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x).$$

4. ***Предел произведения функций равен произведению пределов этих функций:***

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x).$$

5. ***Предел отношения двух функций равен отношению пределов этих функций, если только предел делителя не равен нулю:***

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} \quad [\lim_{x \to a} g(x) \neq 0].$$

Рассмотрим несколько типичных примеров нахождения пределов функций.

Пример 1. Найти

$$\lim_{x \to 5} \frac{7x - 5}{10 + 2x}.$$

По свойству пределов

$$\lim_{x \to 5} \frac{7x - 5}{10 + 2x} = \frac{\lim\limits_{x \to 5} (7x - 5)}{\lim\limits_{x \to 5} (10 + 2x)} = \frac{\lim\limits_{x \to 5} 7x - \lim\limits_{x \to 5} 5}{\lim\limits_{x \to 5} 10 + \lim\limits_{x \to 5} 2x} =$$

$$= \frac{7 \lim\limits_{x \to 5} x - 5}{10 + 2 \lim\limits_{x \to 5} x} = \frac{7 \cdot 5 - 5}{10 + 2 \cdot 5} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}.$$

Пример 2. Найти

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 5x + 6}.$$

При $x \to 3$ числитель и знаменатель данной дроби стремятся к нулю. Поэтому непосредственное применение теоремы о пределе частного здесь невозможно. Однако данную дробь можно сократить:

$$\frac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6}=\frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x-2)}=\frac{x+1}{x-2}.$$

После этого предел может быть легко найден:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 3}\frac{x+1}{x-2}=\frac{3+1}{3-2}=4.$$

Пример 3. Найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}.$$

Этот предел легко находится, если предварительно данную дробь сократить на $\sqrt{x}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\frac{0+1}{0-1}=-1.$$

(Обратите внимание на следующую важную особенность, характерную для рассмотренного примера. Когда мы говорим о пределе $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, то обычно предполагаем, что функция $f(x)$ определена во всех точках, достаточно близких к точке $x=a$. Однако функция $\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$ определена лишь для положительных значений x. Поэтому, рассматривая предел этой функции, мы фактически предполагаем, что $x\to 0$, оставаясь все время положительным. В подобных случаях говорят не просто о пределе, а об *одностороннем* пределе. С аналогичными примерами мы еще встретимся при выполнении упражнений к этому параграфу.)

Пример 4. Найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-1}.$$

Предел знаменателя дроби при $x\to 0$ равен 0. Поэтому непосредственное использование теоремы о пределе частного здесь невозможно. Кроме того, данную дробь нельзя сократить, как мы делали это в примерах 2 и 3. В данном случае числитель и знаменатель дроби следует умножить на выражение $\sqrt{1+x}+1$, сопряженное знаменателю дроби. В результате получим:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x}-1}=\frac{x(\sqrt{1+x}+1)}{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}=\frac{x(\sqrt{1+x}+1)}{1+x-1}=\sqrt{1+x}+1.$$

После этого данный предел находится легко:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-1}=\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+x}+1)=1+1=2.$$

(Полагая, что

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{1+x}=1,$$

мы тем самым используем свойство непрерывности функции $y=\sqrt{1+x}$:

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{1+x}=\sqrt{1+0}=1.)$$

Пример 5. Найти

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}.$$

При $x \to 4$ числитель и знаменатель данной дроби стремятся к нулю. Поэтому применить теорему о пределе дроби нельзя. Преобразуем дробь, представив знаменатель в виде произведения:

$$\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}=\frac{1}{\sqrt{x}+2}.$$

Теперь получаем: $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}=\dfrac{1}{2+2}=\dfrac{1}{4}.$

Упражнения

Найти пределы (№ 1660—1675):

1660. $\lim\limits_{x\to 1}(2x^2+3x-5)$.

1661. $\lim\limits_{x\to 5}(3x-x^2)$.

1662. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

1663. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$.

1664. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+5x-2}{5x^2+12x+4}$.

1665. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2-6x-7}$.

1666. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2+x}{1-\sqrt{x+3}}$.

1667. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a}}{x}$.

1668. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{1-\sqrt{x}}$.

1669. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$.

1670. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{x}-3x}{3\sqrt{x}-2x}$.

1671. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+4}-2}$.

1672. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{2x+10}-4}$.

1673. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$.

1674. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{x+1}-1}$.

1675. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+a}-\sqrt[3]{a}}{x}$.

Некоторые тригонометрические неравенства и их использование при нахождении пределов § 213

В этом параграфе мы докажем некоторые тригонометрические неравенства, которые будут играть важную роль в дальнейшем изучении функций.

1. *Для любого острого угла x (выраженного в радианах)*

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x. \qquad (1)$$

Доказательство. Пусть на рисунке 306 $OA = OB = 1$, $\angle AOB = x$ радианам, BD и AC перпендикулярны к OA. Очевидно, что площадь треугольника OAB меньше площади кругового сектора OAB, а площадь кругового сек-

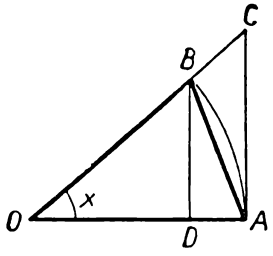

Рис. 306.

тора OAB, в свою очередь, меньше площади треугольника OAC. Но

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot BD = \frac{1}{2} BD;$$

$$S_{\text{сект} \cdot OAB} = \frac{\pi \cdot OA^2}{2\pi} \cdot x = \frac{x}{2};$$

$$S_{\triangle OAC} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot AC = \frac{1}{2} AC.$$

Учитывая, что $BD = \sin x$, $AC = \operatorname{tg} x$, получаем:

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x,$$

откуда и вытекает неравенство (1).

Рисунок 307 служит графической иллюстрацией неравенства (1). В интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ график функции $y = x$ расположен **выше** графика функции $y = \sin x$, но **ниже** графика функции $y = \operatorname{tg} x$.

Остановимся подробнее на неравенстве $\sin x < x$. Мы доказали его в предположении, что $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Но при таком предположении x и $\sin x$ положительны. Поэтому $x = |x|$ и $\sin x = |\sin x|$ и неравенство $\sin x < x$ можно переписать в виде:

$$|\sin x| < |x|. \tag{2}$$

Это неравенство верно и для отрицательных значений x, заключенных в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, так как

$$|\sin(-x)| = |-\sin x| = |\sin x|,$$

$$|-x| = |x|.$$

Перепишем неравенство (2) в виде:

$$|\sin x - 0| < |x|.$$

Если x стремится к 0, то $|\sin x - 0|$, будучи меньше $|x|$, тем более будет стремиться к нулю. В частности, $|\sin x - 0|$ может стать меньше 0,1; 0,01; 0,001 и т. д. Вообще, какое бы малое положительное число ε мы ни взяли, всегда можно добиться, чтобы выполнялось неравенство $|\sin x - 0| < \varepsilon$. Для этого нужно x выбирать в интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Но это означает, что

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0.$$

Предел синуса x при $x \to 0$ равен 0.

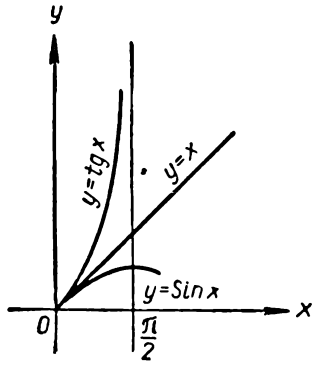

Рис. 307.

(Поскольку $0 = \sin 0$, то полученный результат по существу означает, что функция $y = \sin x$ непрерывна в нуле, то есть при $x = 0$.)

2. ***Для любого острого угла x (выраженного в радианах)***

$$1 - \cos x < x. \tag{3}$$

Действительно, $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$. Но

$0 < \sin\frac{x}{2} < 1$. Поэтому $\sin^2\frac{x}{2} < \sin\frac{x}{2}$. По доказанному выше $\sin\frac{x}{2} < \frac{x}{2}$.

Итак,

$$1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < 2\sin\frac{x}{2} < 2\frac{x}{2} = x,$$

что и доказывает формулу (3).

Если угол x острый, то x и $1 - \cos x$ положительны. Поэтому $x = |x|$, $1 - \cos x = |1 - \cos x|$. Следовательно, неравенство (3) можно переписать в виде

$$|1 - \cos x| < |x|. \qquad (4)$$

Это неравенство, очевидно, верно и при $x < 0$, поскольку

$$|1 - \cos(-x)| = |1 - \cos x|;\ |-x| = |x|.$$

Из (4) вытекает, что

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1.$$

Предел косинуса x при $x \to 0$ равен 1.

Поскольку $1 = \cos 0$, то полученный результат по существу означает, что функция $y = \cos x$ непрерывна в нуле.

Отсюда, используя доказанную выше непрерывность в нуле функции $y = \sin x$, легко показать, что функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ непрерывны в любой точке x. Попробуйте это сделать сами!

Упражнения

Найти пределы (№ 1676—1681):

1676. $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{tg} x$. **1678.** $\lim\limits_{x \to 0} \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$. **1680.** $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right)$.

1677. $\lim\limits_{x \to 0} \cos\frac{x}{2}$. **1679.** $\lim\limits_{x \to 0} \sin 2x$. **1681.** $\lim\limits_{x \to 0} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

1682. Доказать тождества:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \sin(x + \alpha) = \sin\alpha$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \cos(x + \alpha) = \cos\alpha$.

1683. Для всех ли положительных значений x верны неравенства:

а) $\sin x < x$; б) $x < \operatorname{tg} x$?

1684. Докажите, что единственным корнем уравнения $\sin x = x$ является $x = 0$.

Предел отношения $\frac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$ § 214

Докажем, что

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \qquad (1)$$

Пусть x стремится к нулю, оставаясь при этом положительным. Тогда можно считать, что $0 < x < \frac{\pi}{2}$ и потому, как было показано в § 213,

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x,$$

причем все входящие в это неравенство выражения положительны.

Рассмотрим три дроби:

$$\frac{\sin x}{\sin x}, \quad \frac{\sin x}{x} \text{ и } \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}.$$

При одинаковых числителях меньше та дробь, знаменатель которой больше. Поэтому

$$\frac{\sin x}{\sin x} > \frac{\sin x}{x} > \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x},$$

или

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Умножим это неравенство почленно на -1. Знаки неравенства при этом изменятся на противоположные:

$$-1 < -\frac{\sin x}{x} < -\cos x.$$

Прибавив к каждой части этого неравенства 1, получим:

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x.$$

Но $1 - \cos x < x$ (см. § 213). Поэтому

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < x.$$

Так как $x > 0$ и $1 - \frac{\sin x}{x} > 0$, то величины $1 - \frac{\sin x}{x}$ и x в последнем неравенстве можно заменить их абсолютными значениями. В результате получим

$$\left|1 - \frac{\sin x}{x}\right| < |x|,$$

что можно, конечно, записать и в таком виде:

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < |x|. \qquad (2)$$

Неравенство (2) мы получили в предположении, что $x > 0$. Однако оно верно и при $x < 0$, так как функция $\frac{\sin x}{x}$ четна, и, следовательно,

$$\left|\frac{\sin(-x)}{(-x)} - 1\right| = \left|\frac{\sin x}{x} - 1\right|.$$

Если x стремится к нулю, то, как видно из (2), $\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right|$, будучи меньше $|x|$, тем более будет стремиться к нулю. Как бы мало ни было положительное число ε, всегда можно добиться, чтобы выполнялось неравенство

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \varepsilon.$$

Для этого x нужно выбирать в интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Но это и означает, что

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Следствие. Поскольку при малых значениях x $\left|\frac{\sin x}{x} = 1\right|$ мало, то можно написать приближенное равенство

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| \approx 0.$$

Отсюда $\frac{\sin x}{x} \approx 1$ и, следовательно, $\sin x \approx x$.

Итак, ***при малых значениях x***

$$\sin x \approx x.$$

Это лишний раз подтверждает справедливость вывода, к которому мы пришли в § 113 главы V (часть I) при рассмотрении графика функции $y = \sin x$ при малых значениях x.

Примеры: $\sin(0{,}01) \approx 0{,}01$,
$\sin(0{,}04) \approx 0{,}04$,
$\sin(0{,}07) \approx 0{,}07$,
$\sin(-0{,}03) \approx -0{,}03$.

Сравните эти значения с теми, которые приведены в таблицах В.М. Брадиса.

Примеры вычисления пределов § 215

В этом параграфе мы вычислим несколько пределов, используя соотношение

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{x}$.

Умножив числитель и знаменатель данной дроби на 3, получим:

$$\frac{\sin 3x}{x} = \frac{3 \sin 3x}{3x}.$$

Обозначим $3x$ через y. Из условия $x \to 0$, очевидно, вытекает, что и $y \to 0$. Поэтому

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{3 \sin 3x}{3x} = \lim_{y \to 0} \frac{3 \sin y}{y} = 3 \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 3 \cdot 1 = 3.$$

Пример 2. Найти

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin mx}{nx} \quad (n \neq 0).$$

Умножая числитель и знаменатель данной дроби на m и вводя новую переменную $y = mx$, получаем:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin mx}{nx} = \lim_{x \to 0} \frac{m \cdot \sin mx}{n(mx)} = \lim_{y \to 0} \frac{m \sin y}{ny} =$$
$$= \frac{m}{n} \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = \frac{m}{n} \cdot 1 = \frac{m}{n}.$$

Пример 3. Найти

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

Используя тождество $1 - \cos x = 2 \sin^2 \dfrac{x}{2}$, получаем:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin^2 \dfrac{x}{2}}{x^2}.$$

Введем новую переменную $y = \frac{x}{2}$. Тогда $x = 2y$ и

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{y \to 0} \frac{2 \sin^2 y}{(2y)^2} = \frac{1}{2} \lim_{y \to 0} \frac{\sin^2 y}{y^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2},$$

Итак,

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Отсюда, в частности, вытекает, что при малых значениях x

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} \approx \frac{1}{2},$$

или

$$1 - \cos x \approx \frac{1}{2} x^2,$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{1}{2} x^2.$$

Например,

$$\cos(0{,}04) \approx 1 - \frac{1}{2} \cdot 0{,}0016 \approx 0{,}9992,$$

$$\cos(-0{,}08) \approx 1 - \frac{1}{2} \cdot 0{,}0064 \approx 0{,}9968.$$

Сравните эти значения с табличными!

Упражнения

Найти пределы:

1685. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{2x}$.

1686. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{6x}$.

1687. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x}{\sin \frac{x}{3}}$.

1688. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{x - \frac{\pi}{3}}$.

1689. $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}{4x + \pi}$.

1690. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$.

1691. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} ax}{bx}$.

1692. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos 6x - \cos 4x}{x^2}$.

1693. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \sin 4x}{x}$.

1694. $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\sqrt{x + \sin x} - \sqrt{x}}{\sin x}$.

1695. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x - \sin 12x}{10x}$.

1696. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x + \sin 7x}{\frac{x}{4}}$.

1697. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{5 + \sin x} - \sqrt{5 - \sin x}}{x}$.

1698. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + \cos x} - \sqrt{2}}{x^2}$.

1699. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 10x - \cos x}{4x^2}$.

1700. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 11x - 6x}{5x}$.

1701. $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{5}} \dfrac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{5} + x\right)}{(5x + \pi)^2}$.

1702. $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{\sin^2 x - \sin^2 \alpha}{x^2 - \alpha^2}$.

Из истории развития понятий функции и предела § 216

До XVII века математика была наукой о постоянных величинах. Введение переменных величин связано с именем французского ученого Декарта. Его работы получили высокую оценку Ф. Энгельса, который говорил: «Поворотным пунктом в математике была декартова *переменная величина*. Благодаря этому в математику вошли *движение* и *диалектика*».

Термин «функция» появился в одной из работ немецкого ученого Лейбница (1646—1716).

Понятие функции ученые XVII и XVIII веков вводили по-разному. Одни определяли функцию как некое «аналитическое выражение», другие связывали понятие функции с «произвольно начерченной кривой». Идею соответствия, как единственную основу понятия функции, подчеркнул в своем определении немецкий математик Дирихле (1805—1859). y есть функция от x, говорил он, если всякому значению x соответствует вполне определенное значение y, причем совершенно неважно, каким именно способом установлено указанное соответствие. Еще до Дирихле идею соответствия высказал основатель неевклидовой геометрии Николай Иванович Лобачевский (1792—1856). Однако долгое время это оставалось незамеченным в математике.

Привычное для нас обозначение функции $y = f(x)$ принадлежит Эйлеру.

Определение предела впервые появилось в XVII веке. Зачатки теории пределов можно обнаружить, например, в работах английского физика и математика Исаака Ньютона (1642—1727). Однако математики XVII и XVIII веков не ставили своей задачей построить стройную теорию пределов. Эта задача была поставлена и решена лишь в XIX веке. Большая заслуга в этом принадлежит французскому математику Коши (1789—1857). Он развил теорию пределов и положил ее в основу построения одного из важнейших разделов математики — математического анализа.

Задачи на повторение

Найти области определения функций (№ 1703 — 1706):

1703. $y = \sqrt{\dfrac{x+3}{2x-4} - 1}$.

1704. $y = \lg \dfrac{x(2-x)}{x^2 - 2x - 15}$.

1705. $y = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}$.

1706. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$.

Найти области изменения функций (№ 1707—1709):

1707. $y = (-1)^x$. **1708.** $y = 5 \sin x - 10 \cos x + 1$. **1709.** $y = 10^{\cos x}$.

1710. Функции $f(x)$ и $g(x)$ — монотонно возрастающие на всей числовой прямой. Будет ли их произведение монотонно возрастающей функцией? Ответ пояснить примерами.

1711. Доказать, что если функция $f(x)$ периодична с периодом mT, а функция $g(x)$ периодична с периодом nT, где m и n — натуральные числа, то функции $f(x)+g(x)$ и $f(x)\cdot g(x)$ периодичны с периодом mnT.

1712. Доказать, что функции $y=a^x$ и $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$ не являются периодическими.

Какое обобщение этого результата вы могли бы предложить?

1713. Используя тождество (подумайте, как оно получается!)

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

доказать, что любую определенную на всей числовой прямой функцию можно представить в виде суммы четной и нечетной функций.

1714*. Доказать, что любую функцию $f(x)$, определенную на всей числовой прямой, можно единственным способом представить в виде суммы четной функции $\varphi(x)$ и нечетной функции $g(x)$:

$$f(x)=\varphi(x)+g(x).$$

1715. Представить функцию $y=2^x$ в виде суммы четной и нечетной функций.

Исследовать функции (№ 1716—1721):

1716. $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$. **1718.** $y=\dfrac{2x-1}{x}$. **1720.** $y=6x^2+x+1$.

1717. $y=|x^2-2x-3|$. **1719.** $y=\sqrt{1-\cos x}$. **1721.** $y=\{x\}$.

Найти пределы (№ 1722—1737):

1722. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-2x+3}$.

1723. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{2-x}}{2x}$.

1724. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{x}$.

1725. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$.

1726. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x}$.

1727. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 9x+\sin 11x}{5x}$.

1728. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\operatorname{tg} x}{x^3}$.

1729. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$.

1730. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$.

1731. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} ax}{\operatorname{tg} bx}$.

1732. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x}$.

1733. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} ax+\operatorname{tg} bx}{(a+b)x}$.

1734. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\operatorname{tg} x}$.

1735. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$.

1736*. $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\sqrt{\sin x}-\sqrt{\sin\alpha}}{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}$.

1737* $y=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sqrt{\sin x}}{\sqrt{1+\cos x}-1}$.

1738. Доказать, что для любых натуральных чисел m и n

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}=\frac{m}{n}.$$

ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

X

Равномерное и переменное движение по прямой. Скорость и средняя скорость движения § 217

Из всех движений тел простейшим является равномерное движение по прямой. Это такое движение, когда тело, не меняя направления, за любые равные промежутки времени проходит пути одинаковой длины. Равномерно и прямолинейно движутся на некоторых участках поезда, автомобили, пароходы, самолеты и т. д.

Путь, проходимый телом при равномерном движении по прямой в единицу времени, называется *скоростью* этого движения.

На практике мы часто имеем дело с неравномерным движением. Поезд, отходящий от станции, сначала только «набирает скорость». За вторую минуту своего движения он проходит путь, больший, чем за первую, за третью минуту — путь, больший, чем за вторую, и т. д. Набрав определенную скорость, он идет равномерно, проходя за каждую минуту пути одинаковой длины. При приближении к месту назначения поезд начинает сбавлять скорость, проходя за каждую минуту путь, меньший, чем за предыдущую минуту. То же самое можно сказать об автомобиле, пароходе и т. д.

В различные, но равные по величине интервалы времени тело, находящееся в неравномерном движении, может проходить пути разной длины. Поэтому неравномерное движение (в отличие от равномерного) нельзя полностью охарактеризовать длиной пути, пройденного в какую-нибудь единицу времени.

Часто неравномерное движение характеризуется *средней скоростью* за определенный промежуток времени.

Средней скоростью движения за время t называется отношение длины S пути, пройденного телом за время t, к этому времени:

$$v_{ср} = \frac{S}{t}.$$

Для равномерного движения средняя скорость на любом участке пути совпадает со скоростью движения. Средней скоростью обычно характеризуется движение поездов. Например, экспресс Москва — Ленинград (расстояние 650 *км*) находится в пути 6 *ч*, и потому мы говорим, что его средняя скорость равна:

$$v_{ср} = \frac{650}{6} \approx 108\left(\frac{км}{ч}\right).$$

Однако это не означает, что за каждый час экспресс проходит 108 *км*. Например, за первый час движения, когда поезд «набирает скорость», он проходит всего лишь 80—90 *км*. В следующий час пройденный путь составляет примерно 130 *км*. В Бологом экспресс делает остановку, и потому за тот час, на который приходится эта остановка, экспресс проходит путь еще меньший, чем 80—90 *км*.

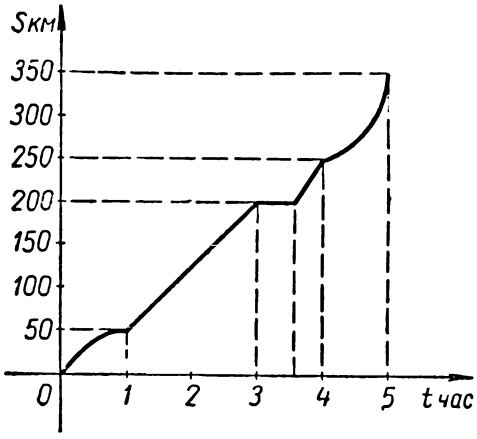

Рис. 308.

Из этого примера видно, что средняя скорость не может служить полной характеристикой неравномерного движения.

Упражнения

1739. На рисунке 308 представлен график движения поезда. На каких участках поезд шел равномерно и на каких неравномерно? Когда он делал остановку и на сколько минут? Найти среднюю скорость поезда за первые 4 часа.

С какой средней скоростью шел поезд в течение четвертого часа движения?

1740. В интервале времени $(0, t_1)$ поезд шел со скоростью $v_1 \frac{км}{ч}$, в интервале времени (t_1, t_2) — со скоростью $v_2 \frac{км}{ч}$, в интервале времени (t_2, t_3) — со скоростью $v_3 \frac{км}{ч}$ и т. д., наконец, в интервале времени (t_{n-1}, t_n) — со скоростью $v_n \frac{км}{ч}$. Чему равна средняя скорость движения поезда в интервале времени $(0, t_n)$?

Закон движения. Мгновенная скорость движения § 218

К более полной характеристике движения можно прийти следующим образом. Время движения тела разобьем на несколько отдельных промежутков (t_1, t_2), (t_2, t_3) и т. д. (не обязательно равных, см. рис. 309) и на каждом из них зададим среднюю скорость движения. Эти средние скорости, конечно, будут полнее характеризовать движение на всем участке, чем средняя скорость за все время движения. Однако и они не дадут ответа на такой, например, вопрос: в какой момент времени в интервале от t_1 до t_2 (рис. 309) поезд шел быстрее: в момент t'_1 или в момент t'_2)?

Средняя скорость тем полнее характеризует движение, чем короче участки пути, на которых она определена. Поэтому один из возможных способов описания неравномерного движения состоит в задании средних скоростей этого движения на все более и более малых участках пути.

Предположим, что задана функция $s(t)$, указывающая, какой путь проходит тело, двигаясь прямолинейно в одном и том же направлении, за время t от

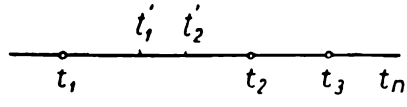

Рис. 309.

начала движения. Эта функция определяет *закон движения тела.* Например, равномерное движение происходит по закону

$$s(t) = vt,$$

где v — скорость движения, свободное падение тел происходит по закону

$$s(t) = \frac{gt^2}{2},$$

где g — ускорение свободно падающего тела, и т. д.

Рассмотрим путь, пройденный телом, движущимся по некоторому закону $s(t)$, за время от t до $t + \tau$. К моменту времени t тело пройдет путь $s(t)$, а к моменту времени $t + \tau$ — путь $s(t + \tau)$. Поэтому за время от t до $t + \tau$ оно пройдет путь, равный $s(t + \tau) - s(t)$. Разделив этот путь на время движения τ, мы получим среднюю скорость движения за время от t до $t + \tau$:

$$v_{ср} = \frac{s(t + \tau) - s(t)}{\tau}.$$

Предел этой скорости при $\tau \to 0$ (если только он существует) называется *мгновенной скоростью движения в момент времени t*:

$$v(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{s(t + \tau) - s(t)}{\tau}. \qquad (1)$$

Мгновенной скоростью движения в момент времени t называется предел средней скорости движения за время от t до $t + \tau$, когда τ стремится к нулю.

Рассмотрим два примера.

Пример 1. Равномерное движение по прямой

В этом случае $s(t) = vt$, где v — скорость движения. Найдем мгновенную скорость этого движения. Для этого предварительно нужно найти среднюю скорость в интервале времени от t до $t + \tau$. Но для равномерного движения средняя скорость на любом участке пути совпадает со скоростью движения v. Поэтому мгновенная скорость $v(t)$ будет равна:

$$v(t) = \lim_{\tau \to 0} v = v.$$

Итак, для равномерного движения мгновенная скорость (как и средняя скорость на любом участке пути) совпадает со скоростью движения.

К такому же результату, конечно, можно было бы прийти и формально, исходя из равенства (1).

Действительно,

$$v(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{s(t + \tau) - s(t)}{\tau} = \lim_{\tau \to 0} \frac{v \cdot (t + \tau) - v \cdot t}{\tau} =$$

$$= \lim_{\tau \to 0} \frac{v \cdot \tau}{\tau} = \lim_{\tau \to 0} v = v.$$

Пример 2. Равноускоренное движение с нулевой начальной скоростью и ускорением a. В этом случае, как известно из физики, тело движется по закону

$$s(t) = \frac{at^2}{2}.$$

По формуле (1) получаем, что мгновенная скорость такого движения $v(t)$ равна:

$$v(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{s(t+\tau) - s(t)}{\tau} = \lim_{\tau \to 0} \frac{\frac{a(t+\tau)^2 - at^2}{2}}{\tau} =$$

$$= \lim_{\tau \to 0} \frac{at^2 + 2at\tau + a\tau^2 - at^2}{2\tau} = \lim_{\tau \to 0} \frac{2at\tau + a\tau^2}{2\tau} =$$

$$= \lim_{\tau \to 0} \left(at + \frac{a}{2}\tau\right) = \lim_{\tau \to 0} at + \lim_{\tau \to 0} \frac{a}{2}\tau.$$

Поскольку at не зависит от τ,

$$\lim_{\tau \to 0} at = at.$$

Кроме того,

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{a}{2}\tau = \frac{a}{2} \lim_{\tau \to 0} \tau = \frac{a}{2} \cdot 0 = 0.$$

Поэтому

$$v(t) = at + 0 = at.$$

Итак, мгновенная скорость равноускоренного движения в момент времени t равна произведению ускорения на время t. В отличие от равномерного движения мгновенная скорость равномерно ускоренного движения изменяется с течением времени.

Упражнения

1741. Точка движется по закону $s(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2}$ (s — путь в метрах, t — время в минутах). Найти мгновенную скорость этой точки:

а) в начальный момент движения;

б) в момент времени t_0.

1742. Найти мгновенную скорость точки, движущейся по закону $s(t) = t$ (s — путь в метрах, t — время в минутах):

а) в начальный момент движения;

б) через 10 *сек* после начала движения;

в) в момент $t = 5$ *мин*.

1743. Найти мгновенную скорость тела, движущегося по закону $s(t) = \sqrt{t}$, в произвольный момент времени t.

Производная функции § 219

На протяжении всего школьного курса алгебры и элементарных функций мы расширяли математические понятия, углубляли их, доводя до более общих, более сложных понятий. То же самое нам предстоит сделать и в этом параграфе

Что представляет собой мгновенная скорость движения, определенная в § 218?

Имеется некоторая функция $s(t)$, указывающая путь, пройденный телом за время от 0 до t. Аргументу t дается некоторое *приращение* τ, то есть вместо значения t рассматривается значение $t + \tau$ Этому приращению аргумента соответствует следующее *приращение функции* $s(t)$:

$$s(t + \tau) - s(t).$$

Это приращение функции делится на приращение аргумента τ

$$\frac{s(t+\tau)-s(t)}{\tau} \tag{1}$$

и берется предел при $\tau \to 0$. Выражение

$$\frac{s(t+\tau)-s(t)}{\tau}$$

можно рассматривать как «среднюю скорость» изменения функции $s(t)$ в интервале от t до $t+\tau$, а предел этого отношения при $\tau \to 0$ — как мгновенную скорость изменения этой функции в момент времени t.

В приведенных выше рассуждениях функция $s(t)$ представляла собой путь, пройденный телом за время от 0 до t. Это обстоятельство накладывало на функцию $s(t)$ определенные ограничения. В частности, она должна была быть определена только для неотрицательных значений аргумента t (ведь t — время), принимать только неотрицательные значения (s — длина пути) и быть монотонно возрастающей (чем больше время тем больше пройденный путь). Теперь же мы обобщим наши результаты на произвольные функции, вообще говоря, никак не связанные с движением тел.

Пусть $f(x)$ — произвольная функция. При фиксированном значении x_0 аргумента x эта функция принимает значение, равное $f(x_0)$. Дадим значению x_0 *приращение* Δx_0*, то есть вместо значения x_0 рассмотрим значение $x_0 + \Delta x_0$. Тогда функция $f(x)$ примет значение $f(x_0 + \Delta x_0)$ и, таким образом, получит приращение Δy_0**:

$$\Delta y_0 = f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0).$$

Отношение

$$\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0}$$

представляет собой среднюю скорость изменения функции $f(x)$ в интервале от x_0 до $x_0 + \Delta x_0$. Эта средняя скорость зависит, очевидно, как от x_0, так и от Δx_0. Устремляя теперь Δx_0 к нулю, мы получим мгновенную скорость изменения функции $f(x)$ в точке $x = x_0$:

$$\lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0}$$

(если, конечно, указанный предел существует). Для заданной функции $f(x)$ этот предел зависит от x_0 и называется *производной от функции $f(x)$ в точке $x = x_0$*. Каждому значению x_0 соответствует свое значение мгновенной скорости изменения функции $f(x)$. Поэтому предел (если только он существует)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

представляющий собой мгновенную скорость изменения функции $f(x)$ *в произвольной точке x*, можно рассматривать как новую функцию аргумента x. Эта новая функция называется *производной от заданной функции $f(x)$*.

---

* Выражение Δx_0 читается: дельта икс нуль. Это одно нераздельное выражение. Его не следует путать с произведением $\Delta \cdot x_0$.

** Δy_0 также нераздельное выражение. Его не следует путать с произведением $\Delta \cdot y_0$.

Часто в выражении «производная от функции $f(x)$» слово «от» опускают и говорят просто «производная функции $f(x)$».

В математике используется несколько обозначений производной. Мы будем пользоваться следующими обозначениями: y' и $f'(x)$:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Найти производную функции $f(x) = c$, где c — некоторая константа.

Имеем: $f(x) = c$, $f(x + \Delta x) = c$.

Поэтому $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = c - c = 0$ и, следовательно, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$.

Таким образом,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0.$$

Производная константы равна 0.

Пример 2. Найти производную функции $f(x) = x$.

Имеем:

$$f(x) = x, \quad f(x + \Delta x) = x + \Delta x.$$

Поэтому

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x) - x = \Delta x.$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Отсюда вытекает, что

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1.$$

Производная функции $f(x) = x$ равна 1.

Пример 3. Найти производную функции $f(x) = x^2$. Имеем:

$$f(x) = x^2, \quad f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2.$$

Поэтому

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = [x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2] - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

Значит,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Следовательно,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x) = 2x + 0 = 2x.$$

Производная функции $f(x) = x^2$ равна $2x$.

В отличие от первых двух примеров здесь производная зависит от x.

Значение производной от функции $f(x)$ при $x = a$ обозначают $f'(a)$. Например, если $f(x) = x^2$, то $f'(x) = 2x$ и потому

$$f'(0) = 2 \cdot 0 = 0.$$
$$f'(1) = 2 \cdot 1 = 2.$$

Упражнения

1744. Найти производные следующих функций:

а) $y = x + 1$; в) $y = (x + 1)^2$; д) $y = 1 - x^2$;

б) $y = 2x^2$; г) $y = 2\sqrt{x}$; е) $y = x^2$.

1745. При нагревании тела его температура T изменяется с течением времени t по закону $T = 0{,}4t^2$ (T — температура в градусах, t — время в секундах). Найти:

а) среднюю скорость изменения температуры тела за промежуток времени от $t_1 = 4$ *сек* до $t_2 = 8$ *сек*;

б) мгновенную скорость изменения температуры тела в момент $t = 5$ *сек*.

1746. Ток I ампер изменяется с течением времени t по закону $I = 0{,}5t^2$, где t — число секунд. Найти скорость изменения тока в конце пятой секунды.

Дифференцируемые функции § 220

Производная функции $y = f(x)$ в точке x определяется как предел

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Но пределы существуют не всегда. Точно так же не всегда существуют и производные. В качестве примера рассмотрим следующую функцию:

$$f(x) = |x|.$$

Покажем, что производная $f'(0)$ от этой функции при $x = 0$ не определена. Действительно, по определению производной

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}. \quad (1)$$

Если Δx стремится к нулю, оставаясь положительным, то $|\Delta x| = \Delta x$ и тогда

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta x > 0)}} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1.$$

Если же Δx стремится к нулю, оставаясь отрицательным, то $|\Delta x| = -\Delta x$ и тогда

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta x < 0)}} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1.$$

Если бы предел в формуле (1) существовал, то он не зависел бы от того, как Δx стремится к нулю. На самом же деле это не так. Но отсюда можно сделать лишь тот вывод, что предел в (1) не существует.

Итак, для функции $f(x) = |x|$ производная в точке $x = 0$ не определена. Легко показать, что во всех остальных точках производная функции $f(x) = |x|$ существует и равна

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Предлагаем учащимся убедиться в этом самостоятельно.

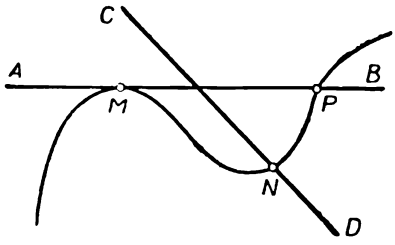

Рис. 310.

Операция нахождения производной от данной функции называется *дифференцированием* этой функции. Функция, имеющая производную в точке $x = a$, называется *дифференцируемой* в этой точке. Если функция дифференцируема в каждой точке некоторого интервала, то говорят, что она дифференцируема в этом интервале. Например, функция $y = |x|$ дифференцируема в каждом интервале, не содержащем точки $x = 0$; функция $y = x$ дифференцируема всюду.

(Можно доказать, что функция, разрывная в точке $x = a$ (см. гл. IX, § 212), не является дифференцируемой в этой точке. Таким образом, ***дифференцируемыми могут быть только непрерывные функции.*** Однако не следует думать, что любая непрерывная в точке $x = a$ функция является дифференцируемой в этой точке. Например, функция $y = |x|$ непрерывна в точке $x = 0$, но, как показано выше, не дифференцируема в этой точке. Существуют и более убедительные примеры: функция может быть всюду непрерывна, но нигде не дифференцируема. Однако рассмотрение таких функций выходит далеко за пределы нашей программы.)

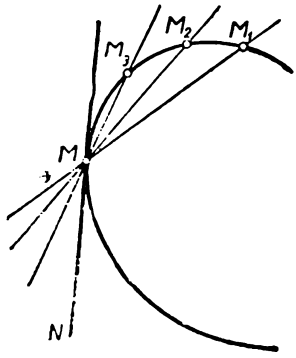

Рис. 311.

Упражнение

1747. Являются ли функции $f(x) = |x|^2$ и $f(x) = |x|^3$ дифференцируемыми в точке $x = 0$?

Касательная к кривой § 221

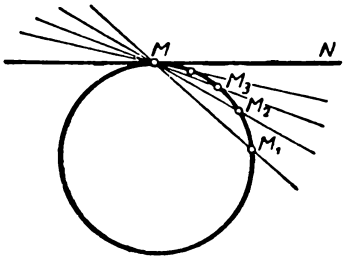

Рис. 312.

До сих пор мы имели дело лишь с касательной к окружности. Касательной к окружности в заданной точке M мы называли прямую, имеющую с окружностью одну и только одну общую точку — точку M. Такое определение годится не для всякой кривой. Например, естественно считать, что прямая AB касается кривой MNP в точке M (рис.310), хотя имеет с этой кривой не одну, а две общие точки: M и P. Прямая CD, наоборот, имеет лишь одну общую точку с кривой MNP — точку N. Однако считать ее касательной к кривой MNP в точке N было бы совсем не естественно.

Чтобы определить касательную к произвольной кривой в точке M (рис. 311), возь-

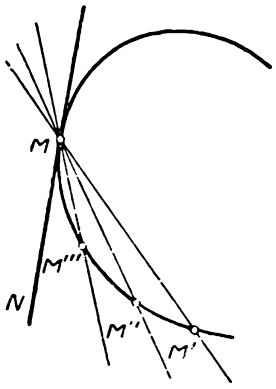

Рис. 313.

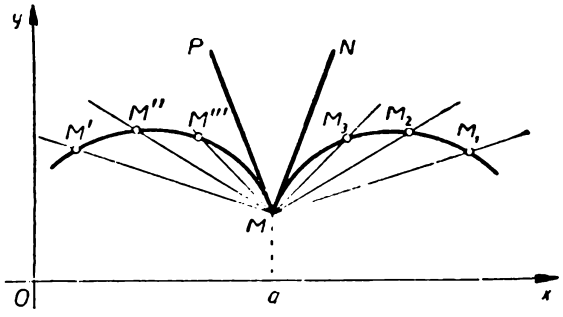

Рис. 314.

мем на этой кривой еще одну точку M_1 и проведем секущую MM_1. Если точку M_1 перемещать по данной кривой, неограниченно приближая ее к точке M, то секущая будет все время поворачиваться вокруг точки M, занимая последовательно положения MM_1, MM_2, MM_3 и т. д. Предельное положение MN секущей и даст нам касательную к кривой в точке M.

Касательной к кривой в точке M называется предельное положение секущей MM_1, когда точка M_1, двигаясь по кривой, неограниченно приближается к точке M.

Нетрудно понять, что для окружности это определение эквивалентно тому, которым мы пользовались до сих пор в геометрии (см. рис. 312).

Точка M_1, двигаясь по кривой, может неограниченно приближаться к точке M с разных сторон. Например, на рисунке 313 точка M' приближается к M не сверху, как на рисунке 311, а снизу. В этом случае мы имеем дело с другими секущими: MM', MM'', MM''' и т. д., но их предельное положение то же самое — MN.

Однако не исключена и такая возможность (см. рис. 314): в результате приближения точки M_1 к точке M с п р а в а секущие MM_1, MM_2, MM_3,... стремятся занять одно предельное положение — MN, а в результате приближения точки M' к точке M с л е в а секущие MM', MM'', MM''',... стремятся занять другое предельное положение — MP. В подобных случаях говорят, что кривая не имеет касательной в данной точке.

Упражнения

1748. Что является касательной к прямой в произвольной ее точке?

1749. Имеет ли график функции $y = |x|$ касательную в точке с абсциссой

а) -1; б) 0; в) 1?

1750. Существует ли касательная к графику функции $y = |\sin x|$ в точке $x = \pi$?

1751. Хорошо известно, как определяется угол между двумя п р я м ы м и. А как бы вы определили угол между двумя пересекающимися к р и в ы м и в точке их пересечения (см. рис. 315)?

Рис. 315.

Геометрическое истолкование производной § 222

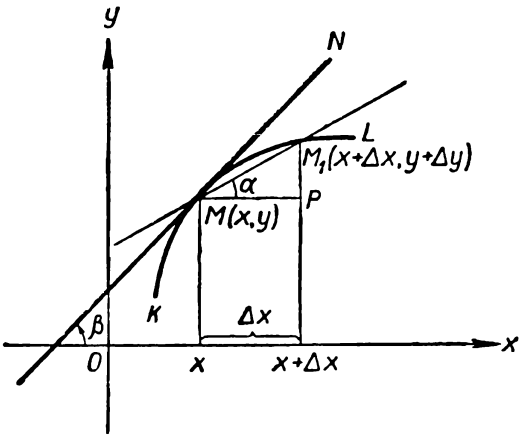

Рис. 316.

Пусть кривая KL, представленная на рисунке 316, есть график функции $y = f(x)$. Отметим на ней две точки: M с координатами (x, y) и M_1 с координатами $(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Проведем отрезок MP параллельно оси абсцисс. В треугольнике MM_1P $MP = \Delta x$, $M_1P = \Delta y$. Поэтому отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ равно тангенсу угла α, образованного секущей MM_1 с осью абсцисс. При $\Delta x \to 0$ точка M остается неподвижной, а M_1 неограниченно приближается вдоль кривой к точке M. Секущая MM_1 все это время изменяет свое направление. Вместе с этим изменяется и угол α. При этом

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha.$$

В пределе хорда MM_1 займет положение касательной MN, образуя с осью абсцисс некоторый угол β. Очевидно, что при этом $\beta = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha$, и

$$\operatorname{tg} \beta = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \alpha.$$

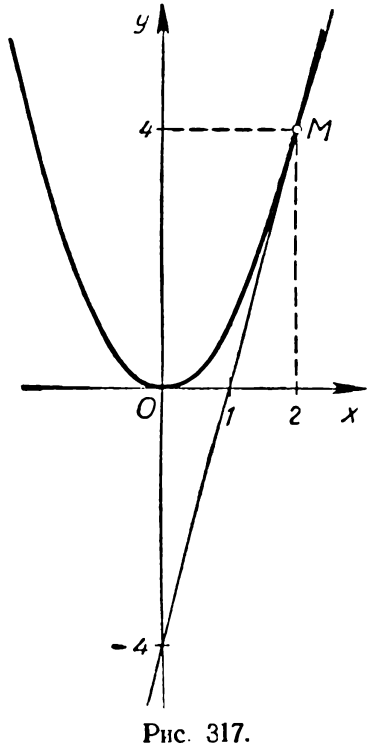

Рис. 317.

Но

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg} \beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'.$$

Таким образом, ***производная функции $f(x)$ в точке x равна тангенсу угла наклона касательной к графику этой функции в точке с абсциссой x.***

Полученное соотношение между значением производной от функции $f(x)$ в произвольной точке x и угловым коэффициентом касательной к кривой $y = f(x)$ в этой точке позволяет довольно просто составить уравнение касательной. Поясним это на следующем примере.

Пусть требуется найти уравнение касательной к параболе $y = x^2$ в точке M с абсциссой $x = 2$ (рис. 317). Искомая касательная имеет уравнение $y = kx + b$. Угловой коэффициент k равен значению производной от функции $y = x^2$ в точке $x = 2$. Так как $y = x^2$, то $y' = 2x$. Поэтому $k = 4$. Следовательно, касательная имеет уравнение $y = 4x + b$. Неизвестный коэффициент b можно найти из

условия, что касательная проходит через точку M параболы $y = x^2$ с абсциссой $x = 2$ (то есть через точку касания). Ордината этой точки равна 4. Подставляя в уравнение $y = 4x + b$ $x = 2$, $y = 4$, получаем $4 = 8 + b$, откуда $b = -4$. Итак, искомая касательная имеет уравнение $y = 4x - 4$.

Упражнения

1752. Написать уравнение касательной к параболе $y = x^2$ в точке с абсциссой:

а) -1; б) 0; в) $+1$.

1753. Под каким углом прямая $x = 3$ пересекается с параболой $y = x^2$?

1754. В каких точках прямая $y = x$ пересекается с параболой $y = x^2$? Какие углы образуются в результате пересечения?

Вынесение постоянного множителя за знак производной § 223

Пусть $g(x) = af(x)$, где a — некоторое число, а $f(x)$ — произвольная дифференцируемая функция. Покажем, что функция $g(x)$ также дифференцируема и

$$g'(x) = af'(x). \qquad (1)$$

Действительно,

$$\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} = \frac{af(x+\Delta x)-af(x)}{\Delta x} = a\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Так как функция $f(x)$ дифференцируема, то предел отношения $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ существует и равен $f'(x)$.

Поэтому $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$

также существует и равен $af'(x)$. Соотношение (1) доказано.

Постоянную величину можно выносить за знак производной.

Примеры.

$$(3x)' = 3 \cdot (x)' = 3 \cdot 1 = 3;$$
$$(-5x^2)' = -5\,(x^2)' = -5 \cdot 2x = -10x.$$

Упражнение

1755. (Устно.) Найти производные следующих функций:

а) $y = -x$; в) $y = -\frac{1}{3}x$; д) $y = -\frac{x^2}{6}$; ж) $y = -\sqrt{3}\,x^2$;

б) $y = \frac{x}{2}$; г) $y = \sqrt{5}\,x$; е) $y = \frac{1}{2}x^2$; з) $y = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}}x^2$.

Производная суммы функций § 224

Теорема. ***Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы, то их сумма $w(x) = u(x) + v(x)$ также дифференцируема, причем***

$$w'(x) = u'(x) + v'(x).$$

(Производная от суммы двух функций равна сумме производных от этих функций.)

Доказательство. Имеем:

$$\Delta w(x) = w(x + \Delta x) - w(x) =$$
$$= [u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x)] - [u(x) + v(x)] =$$
$$= [u(x + \Delta x) - u(x)] + [v(x + \Delta x) - v(x)].$$

Поэтому

$$\frac{\Delta w}{\Delta x} = \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}.$$

Так как функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы, то существуют пределы

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} = u'(x),$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} = v'(x).$$

Следовательно, существует и предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = w'(x),$$

причем

$$w'(x) = u'(x) + v'(x).$$

Мы получили формулу для производной суммы двух функций. Аналогично можно получить и формулу для производной разности двух функций

$$[u(x) - v(x)]' = u'(x) - v'(x).$$

Впрочем, ее можно вывести из формулы для производной от суммы, если выражение $u(x) - v(x)$ рассматривать как сумму $u(x) + [-v(x)]$ и использовать теорему о вынесении постоянного множителя за знак производной. Предлагаем учащимся разобраться в этом самостоятельно.

Отметим, что доказанная выше теорема верна для любого конечного числа слагаемых:

$$(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)' = u'_1 + u'_2 + \ldots + u'_n.$$

Примеры. Пусть $f(x) = x^2 + 2x - 5$.

Тогда $f'(x) = (x^2)' + (2x)' - (5)' = 2x + 2 - 0 = 2x + 2.$

Аналогично,

$$(-3x^2 + 5x + 7)' = (-3x^2)' + (5x)' + (7)' = -3 \cdot 2x + 5 \cdot 1 + 0 = -6x + 5.$$

Упражнения

Найти производные следующих функций:

1756. (Устно.)

а) $y = 1 - x$;
б) $y = x - x^2$;
в) $y = 2x + x^2 - 7$;
г) $y = 1 - 3x + 6x^2$;
д) $y = 6 - 3x^2$;
е) $y = x - \frac{\sqrt{2}}{2} x^2$;
ж) $y = x(1 - x)$;
з) $y = (x + 1)(x - 1)$.

1757. $y = (x - 1)(x + 2)$.
1758. $y = (x - 1)^2$.
1759. $y = (2x - 1)^2$.
1760. $y = (3 - 2x)(x - 6)$.
1761. $y = 3x - 5(1 - x)(1 - 2x)$.
1762. $y = (x - 1)^2 - (x + 1)^2$.

Пусть функция $w(x)$ равна произведению двух функций $u(x)$ и $v(x)$:

$$w(x) = u(x) \cdot v(x)$$

То же самое мы будем записывать короче:

$$w = u \cdot v.$$

Предположим, что функции u и v дифференцируемы. Будет ли дифференцируемым их произведение w? Имеем:

$$\Delta w = w(x + \Delta x) - w(x) = \\ = u(x + \Delta x)\, v(x + \Delta x) - u(x)\, v(x).$$

Но

$$u(x + \Delta x) - u(x) = \Delta u, \\ v(x + \Delta x) - v(x) = \Delta v.$$

Отсюда

$$u(x + \Delta x) = u + \Delta u, \\ v(x + \Delta x) = v + \Delta v.$$

Следовательно,

$$\Delta w = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = \\ = u \cdot v + u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot v + \Delta u \cdot \Delta v - uv = \\ = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \Delta v.$$

Поэтому

$$\frac{\Delta w}{\Delta x} = u \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta v.$$

При $\Delta x \to 0$ получаем:

$$u \to u; \\ v \to v; \\ \frac{\Delta u}{\Delta x} \to u'; \\ \frac{\Delta v}{\Delta x} \to v'.$$

Покажем что при $\Delta x \to 0$ Δv также стремится к нулю. Действительно,

$$\Delta v = \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \Delta x \to v' \cdot 0 = 0.$$

Таким образом,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = uv' + u'v + u' \cdot 0 = uv' + u'v.$$

Итак, в рассматриваемом случае производная существует и равна:

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Производная произведения двух функций равна произведению производной от первой функции на вторую функцию плюс произведение первой функции на производную от второй функции.

Примеры.

1) Найти производную функции $y = (x + a)(x + b)$.

По правилу дифференцирования произведения

$$y' = (x + a)'(x + b) + (x + a)(x + b)' = 1 \cdot (x + b) + (x + a) \cdot 1 = \\ = 2x + a + b$$

2) Найти производную функции $y = (x + 1)(x^2 - 3)$.

Имеем:

$$y' = (x+1)'(x^2-3) + (x+1)(x^2-3)' =$$
$$= (1+0)(x^2-3) + (x+1)(2x+0) = 3x^2 + 2x - 3.$$

Упражнения

Найти производные следующих функций (№ 1763—1771):

1763. $y = (x^2+1)(3-5x^2)$.
1764. $y = 5x^2(x-x^2)$.
1765. $y = (x^2+x+1)(x^2-x+1)$.
1766. $y = (1-3x+7x^2)(-5x^2-1)$.
1767. $y = x^4$.
1768. $y = x^2(1-x^2)$.
1769. $y = (2x-3)^4$.
1770. $y = (x^2+ax)^2$.
1771. $y = (x^3-a)(x^3+b)$.

1772. Показать, что теорема о вынесении постоянного множителя за знак производной (§ 223) является частным случаем теоремы о дифференцировании произведения.

1773. Доказать тождество

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

Используя его, найти производную функции $y = (x+a)(x+b)(x+c)$.

Производная дроби — § 226

Пусть u и v — некоторые функции аргумента x. Как, зная производные этих функций u' и v', найти производную их отношения $\frac{u}{v}$ в тех точках, в которых v не равно нулю? Да и вообще, существует ли эта производная?

Чтобы решить эту задачу, выполним следующие преобразования:

$$\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v} =$$
$$= \frac{uv + v\Delta u - uv - u\Delta v}{v(v+\Delta v)} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v^2 + v\Delta v}.$$

Поэтому

$$\frac{\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} = \frac{1}{v^2 + v\Delta v}\left[\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v - u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}\right].$$

Поскольку функции u и v дифференцируемы, существуют пределы:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = u',$$
$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = v'.$$

Кроме того,

$$\lim_{\Delta x \to 0}[v^2 + v\Delta v] = \lim_{\Delta x \to 0}\left[v^2 + v\frac{\Delta v}{\Delta x}\cdot\Delta x\right] = v^2 + vv'\cdot 0 = v^2.$$

Поэтому существует и предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u}{v}}{\Delta x} = \left(\frac{u}{v}\right)',$$

равный

$$\frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Итак, ***если функции u и v дифференцируемы, то в тех точках, в которых v отлично от нуля, отношение $\frac{u}{v}$ также дифференцируемо и***

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Примеры.

1) $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{(1+x)'(1-x) - (1+x)(1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{1 \cdot (1-x) - (1+x)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$;

2) $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{(1)'x - 1 \cdot (x)'}{x^2} = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$.

Упражнения

Найти производные следующих функций:

1774. $y = \frac{1-x}{1+x}$.

1775. $y = \frac{2x-3}{5-4x}$.

1776. $y = \frac{x}{x^2-1}$.

1777. $y = \frac{2x^2}{1-7x}$.

1778. $y = \frac{5}{6x-4}$.

1779. $y = \frac{5}{6-x}$.

1780. $y = \frac{-7}{3-10x}$.

1781. $y = \frac{ax+b}{cx+d}$.

Производная степенной функции § 227

В предыдущих параграфах мы уже рассматривали некоторые примеры на нахождение производной от степенной функции $y = x^n$ при натуральном n. Так, например, мы доказали, что $(x')=1$, $(x^2)' = 2x$. Используя теорему о производной произведения двух функций, легко получить производные и любых других натуральных степеней x. Например,

$$(x^3)' = (x^2 \cdot x)' = (x^2)' \cdot x + x^2 \cdot (x)' = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2;$$
$$(x^4)' = (x^3 \cdot x)' = (x^3)' \cdot x + x^3 \cdot (x)' = 3x^2 \cdot x + x^3 \cdot 1 = 4x^3;$$
$$(x^5)' = (x^4 \cdot x)' = (x^4)' \cdot x + x^4 \cdot (x)' = 4x^3 \cdot x + x^4 \cdot 1 = 5x^4$$

и т. д. Нетрудно подметить общее правило для нахождения производной от функции $y = x^n$ при любом натуральном n.

Чтобы найти производную функции $y = x^n$, нужно показатель n взять коэффициентом, а у самого x показатель понизить на единицу, то есть

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \qquad (1)$$

Например,

$$(x^{10})' = 10x^9, \quad (x^{45})' = 45x^{44}.$$

Рассуждения, которые мы проводили здесь в подтверждение справедливости формулы (1), являются лишь наводящими; за строгое доказательство этой формулы их принять, конечно, нельзя. К формуле (1) мы еще вернемся в § 262, где и дадим ее строгое доказательство.

Полученное нами правило нахождения производной от степенной функции верно не только для натуральных, но и для любых показателей, то есть для любого действительного числа α

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (x > 0).$$

Доказательство этой формулы выходит за пределы школьной программы и поэтому здесь не приводится.

Примеры.

1) Пусть $y = \frac{1}{x}$. Тогда

$$y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \quad (x \neq 0).$$

2) Пусть $y = \sqrt{x}$. Тогда

$$y' = (\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0).$$

3) При $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$y' = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} \quad (x > 0).$$

Упражнения

Найти производные следующих функций (№ 1782—1788):

1782. (Устно.)

а) $y = x^7$; г) $y = \frac{4}{x}$; е) $y = \frac{1}{x^2}$;

б) $y = \frac{1}{5}x^5$; д) $y = x\sqrt{x}$; ж) $y = \frac{1}{3x^2}$.

в) $y = -2x^{\sqrt{2}}$;

1783. $y = \sqrt{x\sqrt{x}}$. **1785.** $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. **1787.** $y = \frac{5x^2 - x - 1}{x}$.

1784. $y = \sqrt[3]{3x\sqrt{5x}}$. **1786.** $y = \frac{1}{x\sqrt{2x}}$. **1788.** $y = \frac{7 - 3x + x^4}{x\sqrt{x}}$.

1789. Почему, приводя общую формулу

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1},$$

обычно оговаривают, что $x > 0$?

Многочлен степени n имеет вид:

$$P_n(x) = a_0x^n = a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

где a_n — свободный член, а a_0, a_1, ..., a_{n-1} — коэффициенты при x^n, x^{n-1}, ..., x (соответственно), причем $a \neq 0$. Такое выражение можно рассматривать как сумму $(n + 1)$ функций: a_0x^n, a_1x^{n-1}, a_2x^{n-2}, ..., $a_{n-1}x$, a_n. Поэтому производная многочлена равна сумме производных этих функций:

$$P_n'(x) = (a_0x^n)' + (a_1x^{n-1})' + (a_2x^{n-2})' + \ldots + (a_{n-1}x)' + (a_n)'.$$

Производная от a_n, как производная от константы, равна нулю. Остальные производные легко найти, используя то, что постоянный множитель можно выносить за знак производной и при любом натуральном k $(x^k)' = kx^{k-1}$. Таким образом, получаем:

$$\begin{gathered}(a_0x^n)' = a_0(x^n)' = a_0nx^{n-1};\\ (a_1x^{n-1})' = a_1(x^{n-1})' = a_1(n-1)x^{n-2};\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (a_{n-1}x)' = a_{n-1}(x)' = a_{n-1};\\ (a_n)' = 0.\end{gathered}$$

Отсюда

$$\begin{gathered}(a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n)' =\\ = a_0nx^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}.\end{gathered}$$

Примеры.

1) $(3x^2 - 5x - 7)' = 3 \cdot 2x - 5 = 6x - 5$;

2) $(10x^5 - 4x^3 + x)' = 10 \cdot 6x^5 - 4 \cdot 3x^2 + 1 = 60x^5 - 12x^2 + 1$.

Упражнения

Найти производные следующих функций:

1790. $y = 2x^5 - x$.
1791. $y = 3x^7 - 6x - 4x^3 + 5x^2 + 17$.
1792. $y = -x^3 - 3x^2 + 6x - 100$.
1793. $y = 5 - 6x + 17x^4$.
1794. $y = (x^3 - 1 - 2x)(x^2 - 5)$.
1795. $y = (x^7 + x)^2$.
1796. $y = (2x - 6x^5)^3$.

Дифференцирование тригонометрических функций **§ 229**

Теорема 1. ***Производная синуса равна косинусу:***

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Доказательство. Пусть аргумент x получил приращение Δx. Тогда функция $y = \sin x$ получит приращение

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x.$$

Преобразуем это выражение, используя формулу для синуса суммы двух углов:

$$\begin{gathered}\Delta y = \sin x \cdot \cos\Delta x + \cos x \cdot \sin\Delta x - \sin x =\\ = \cos x \cdot \sin\Delta x - \sin x(1 - \cos\Delta x).\end{gathered}$$

Учитывая, что $1 - \cos \Delta x = 2 \sin^2 \left(\frac{\Delta x}{2}\right)$, получаем:

$$\Delta y = \cos x \sin \Delta x - 2 \sin x \sin x^2 \left(\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Отсюда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x \cdot \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} - 2 \sin x \cdot \frac{\sin^2 \left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}. \quad (1)$$

Мы знаем (гл. IX, § 214), что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1$. Исходя из этого, найдем предел выражения $\frac{\sin^2 \left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$. Обозначим $\left(\frac{\Delta x}{2}\right)$ через z. Тогда $\Delta x = 2z$ и потому

$$\frac{\sin^2 \left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\sin^2 z}{2z}.$$

Следовательно,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin^2 \left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{z \to 0} \frac{\sin^2 z}{2z} = \frac{1}{2} \lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} \cdot \lim_{z \to 0} \sin z = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0 = 0.$$

Теперь из (1) получаем:

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} - 2 \sin x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin^2 \left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$
$$= \cos x \cdot 1 - 2 \sin x \cdot 0 = \cos x.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. ***Производная косинуса равна синусу, взятому с противоположным знаком:***

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Доказательство. Пусть аргумент x получил приращение Δx. Тогда функция $y = \cos x$ получит приращение

$$\Delta y = \cos (x + \Delta x) - \cos x.$$

Преобразуем это выражение, используя формулу для косинуса суммы двух углов:

$$\Delta y = \cos (x + \Delta x) - \cos x = \cos x \cdot \cos \Delta x - \sin x \sin \Delta x - \cos x =$$
$$= -\sin x \sin \Delta x - \cos x (1 - \cos \Delta x) =$$
$$= -\sin x \sin \Delta x - 2 \cos x \sin^2 \left(\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Отсюда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\sin x \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} - 2 \cos x \frac{\sin^2 \left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x};$$

но

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1, \text{ а } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin^2 \left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = 0.$$

Поэтому

$$(\cos x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\sin x \cdot 1 - 2\cos x \cdot 0 = -\sin x.$$

Теорема доказана.

Примеры.

1) Найти производную функции $y = a \sin x + b \cos x$.

Имеем:

$y' = (a \sin x + b \cos x)' = a (\sin x)' + b (\cos x)' = a \cos x - b \sin x$.

2) Найти производную функции $y = x \sin x$.

По правилу дифференцирования произведения двух функций получаем:

$$y' = (x \sin x)' = x' \sin x + x (\sin x)' = \sin x + x \cos x.$$

Используя правило дифференцирования дроби, легко найти производные функций $\operatorname{tg} x$ при $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ и $\operatorname{ctg} x$ при $x \neq n\pi$.

Действительно,

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Итак,

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi\right);$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad (x \neq n\pi).$$

Упражнения

1797. Написать уравнение касательной к синусоиде $y = \sin x$ в точке с абсциссой:

а) $x = 0$; б) $x = \frac{\pi}{2}$; в) $x = \frac{3}{2}\pi$; г) $x = \frac{\pi}{4}$; д) $x = \pi$.

1798. Написать уравнение касательной к косинусоиде $y = \cos x$ в точке с абсциссой:

а) $x = 0$; б) $x = \frac{\pi}{2}$; в) $x = \frac{3}{2}\pi$; г) $x = \frac{\pi}{4}$; д) $x = \pi$.

Найти производные следующих функций:

1799. $y = 3 \sin x + 2 \cos x$.

1800. $y = 4 \sin x - 5 \cos x$.

1801. $y = -\sin x + 7 \cos x$.

1802. $y = -0 \sin x - 9 \cos x$.

1803. $y = \sin^2 x$.

1804. $y = \cos^2 x$.

1805. $y = \sin x \cdot \cos x$.

1806. $y = x^2 \sin x$.

1807. $y = x^2 \cos x$.

1808.* $y = \cos^2 \frac{x}{2}$.

1809. $y = (5x + \sin x)(x^2 - \cos x)$.

1810. $y = (1 - 2 \sin x)(1 - 3 \cos x)$.

1811. $y = \sin 2x$.
1812. $y = \cos 2x$.
1813. $y = (a + bx)\sin x + (c + dx)\cos x$.
1814. $y = \dfrac{\sin x}{x}$.
1815. $y = \sin^2 x + \cos^2 x$.
1816. $y = \sqrt{x}\sin x$.
1817. $y = \dfrac{3\cos x}{\sqrt{x}}$.
1818. $y = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.
1819. $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

Дифференцирование функции $f(ax + b)$ § 230

В математике часто приходится иметь дело с выражениями вида $f(ax + b)$, где $f(x)$ — некоторая заданная функция. Так, при изучении гармонических колебаний рассматриваются функции типа $\sin(\omega x + \varphi)$. При решении различных задач часто встречаются выражения вида $\lg(ax + b)$, $(x + a)^n$ и т. д. Большой интерес представляет вопрос о дифференцировании подобных функций.

Пусть $f(x)$ — некоторая функция, для которой мы можем найти производную. Как в таком случае найти производную функции $\varphi(x)$, которая выражается через $f(x)$ следующим образом:

$$\varphi(x) = f(ax + b)?$$

По определению производной

$$\varphi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f[a(x + \Delta x) + b] - f(ax + b)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f[(ax + b) + a \cdot \Delta x] - f(ax + b)}{\Delta x}.$$

Обозначив $ax + b$ через y, получим:

$$\varphi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(y + a\Delta x) - f(y)}{\Delta x}.$$

Умножим числитель и знаменатель этого выражения на число a:

$$\varphi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(y + a\Delta x) - f(y)}{a\Delta x} \cdot a.$$

Обозначив теперь $a\Delta x$ через h, получим:

$$\varphi'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(y + h) - f(y)}{h} \cdot a.$$

(Поскольку $\Delta x \to 0$, то и $h = a\Delta x \to 0$.)

Но $$\lim_{h \to 0} \frac{f(y + h) - f(y)}{h} = f'(y).$$

Поэтому

$$\varphi'(x) = af'(y)$$

Вспоминая, что $y = ax + b$, получаем окончательно:

$$\varphi'(x) = af'(ax + b).$$

Итак,

$$[f(ax+b)]' = af'(ax+b). \qquad (1)$$

Число a есть производная функции $ax+b$. Поэтому равенство (1) можно сформулировать таким образом.

Для нахождения производной выражения $f(ax+b)$ достаточно продифференцировать его по правилу дифференцирования выражения $f(x)$ (с заменой в окончательном выражении x на $ax+b$) и результат умножить на производную выражения $ax+b$ (то есть на число a).

Примеры.

1) $[(2x+1)^{10}]' = 10(2x+1)^9 \cdot (2x+1)' = 10(2x+1)^9 \cdot 2 = 20(2x+1)^9$;

2) $(\sin 3x)' = \cos 3x \cdot (3x)' = 3\cos 3x$;

3) $$\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2}\right)\right]' = -\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2}\right)\cdot\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2}\right)' =$$

$$= -\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2}\right).$$

Упражнения

Найти производные следующих функций (№ 1820—1834):

1820. $y = (2x+3)^5$.
1821. $y = (x+7)^3$.
1822. $y = (1-5x)^7$.
1823. $y = \sin 4x$.
1824. $y = \sin\dfrac{x}{5}$.
1825. $y = \cos 6x$.
1826. $y = \sin(2x-3)$.
1827. $y = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$.
1828. $y = A\sin(\omega x+\varphi)$.
1829. $y = A\cos(\varphi-\omega x)$.
1830. $y = 3x\sin 2x$.
1831. $y = 3(x-5)^3 + 2(1-x)^4$.
1832. $y = 3x\sin 2x + 2x\cos 3x$.
1833. $y = \sqrt{2x+1}$.
1834. $y = \sqrt[3]{1-x}$.

1835. Доказать, что $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)' = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ $\left(x \neq -\dfrac{d}{c}\right)$.

Понятие о второй производной. Производные высших порядков — § 231

Производная от производной y' функции y называется второй производной этой функции и обозначается y'' или $f''(x)$:

$$y'' = (y')'; \quad f''(x) = [f'(x)]'.$$

Рассмотрим несколько примеров.

1) Пусть $y = 3x^3 - 6x^2 + 7x - 1$. По правилу дифференцирования многочленов

$$y' = (3x^3 - 6x^2 + 7x - 1)' = 9x^2 - 12x + 7;$$

$$y'' = (y')' = (9x^2 - 12x + 7)' = 18x - 12$$

2) Пусть $y = \sin x$. Тогда $y' = (\sin x)' = \cos x$; $y'' = (\cos x)' = -\sin x$.

3) Если $y = \frac{ax^2}{2}$, то

$$y' = \left(\frac{ax^2}{2}\right)' = \frac{a}{2}(x^2)' = \frac{a}{2} \cdot 2x = ax;$$

$$y'' = (ax)' = a.$$

Вторая производная y'' функции y, так же как и первая ее производная y', допускает простую физическую интерпретацию. Будучи производной от первой производной y', она характеризует скорость изменения этой производной. Первая же производная y' характеризует скорость изменения функции y. Таким образом, y'' характеризует «скорость изменения скорости изменения» функции y. С подобным понятием мы уже сталкивались в физике. Изучая равноускоренное движение, мы вводили понятие у с к о р е н и я как изменения скорости движения в единицу времени. Это понятие как раз и характеризует скорость изменения скорости движения. Поэтому, используя язык механики, можно сказать, что вторая производная y'' функции y есть *ускорение*, с которым функция $y = f(x)$ изменяет свои значения при изменении значений аргумента x.

Третья производная функции $y = f(x)$ есть производная от второй производной этой функции. Она обозначается y''' или $f'''(x) : y = (y'')'$, $f'''(x) = [f''(x)]'$. Аналогично, четвертая производная функции $y = f(x)$ (обозначается y^{IV} или $f^{IV}(x)$) есть производная от ее третьей производной и т. д.

n-я производная функции $f(x)$ иначе называется *производной n-го порядка* (обозначается $f^{(n)}(x)$). Например, третья производная иначе называется производной третьего порядка, четвертая производная — производной четвертого порядка и т. д.

Примеры.

1) Для функции $y = x^2 + x + 1$ имеем:

$$y' = 2x + 1;$$
$$y'' = 2;$$
$$y''' = 0;$$
$$y^{IV} = 0.$$

Очевидно, что все производные данной функции, начиная с третьей, равны нулю.

2) Для функции $y = \sin x$:

$$y' = \cos x;$$
$$y'' = -\sin x;$$
$$y''' = -\cos x;$$
$$y^{IV} = -(-\sin x) = \sin x;$$
$$y^{V} = \cos x$$

и т. д.

Упражнения

1836. Найти ускорение тела, движущегося по закону $s(t) = 2t^3 + 5t^2 + 4t$ (s — путь в метрах, t — время в минутах), в момент времени: а) $t = 40$ *сек*; б) $t = 1$ *ч*.

1837. Найти ускорение тела, движущегося по закону $s = \sqrt{t}$ (s — путь в метрах, t — время в минутах), в произвольный момент времени t.

Для данных функций найти производные всех порядков (1838—1843):

1838. $y = (x + 2)^3$.

1839. $y = (2x - 1)^3$.

1840. $y = x^2 - x - 1$.

1841. $y = x^5 + 4x^3 - 7x^2$.

1842. $y = \cos x$.

1843. $y = (1+x)^{100}$.

1844. Доказать, что для функции $y = a \sin x + b \cos x$ справедливо соотношение $y^{IV} = y$.

1845. Сколько раз нужно продифференцировать функцию $y = (x^2 + 1)^{10}$, чтобы в результате получился многочлен 50-й степени?

1846*. Найти производную 100-го порядка от функции $y = \sin x \cos^2 x$.

Выражение коэффициентов многочлена через значения его производных § 232

Пусть

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots + a_n x^n. \quad (1)$$

Тогда

$$P'(x) = 1 \cdot a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots + n a_n x^{n-1}. \quad (2)$$

$$P''(x) = 2 \cdot 1 \cdot a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + 4 \cdot 3a_4 x^2 + \ldots + n(n-1) a_n x^{n-2}. \quad (3)$$

$$P'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2a_4 x + \ldots + n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3} \quad (4)$$

и т. д. Полагая в формулах (1), (2), (3) и (4) $x = 0$, получаем:

$$P(0) = a_0,$$
$$P'(0) = 1 \cdot a_1,$$
$$P''(0) = 1 \cdot 2a_2,$$
$$P'''(0) = 1 \cdot 2 \cdot 3a_3,$$

откуда

$$a_0 = P(0),$$
$$a_1 = \frac{P'(0)}{1},$$
$$a_2 = \frac{P''(0)}{1 \cdot 2},$$
$$a_3 = \frac{P'''(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Продолжая этот процесс дальше, мы получили бы:

$$a_4 = \frac{P^{IV}(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},$$
$$a_5 = \frac{P^{V}(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

и т. д. Очевидно, что для любого натурального k

$$a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}, \quad (5)$$

где $P^k(0)$ — значение k-й производной многочлена $P(x)$ при $x = 0$.

Произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$ принято обозначать символом $k!$ (читается: ка факториал). Поэтому формулу (5) можно переписать в виде:

$$a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}. \quad (6)$$

Эта формула будет верна и при $k = 0$, если под выражением $P^{0)}(x)$ (нулевой производной функции $P(x)$) подразумевать просто функцию $P(x)$ и считать, что $0! = 1$

Формула (6) выражает коэффициент многочлена $P(x)$ при x^k через значение k-й производной этого многочлена в нуле.

Поясним эту формулу на некоторых примерах.

Пример 1. Найти коэффициент многочлена $(x+1)^{10}$ при x^3.

Имеем:

$$P(x) = (x+1)^{10};$$
$$P'(x) = 10(x+1)^9;$$
$$P''(x) = 10 \cdot 9(x+1)^8;$$
$$P'''(x) = 10 \cdot 9 \cdot 8(x+1)^7$$

Поэтому $P'''(0) = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 1^7 = 720$. По формуле (6) получаем:

$$\frac{P'''(0)}{3!} = \frac{720}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$$

Итак, коэффициент многочлена $(x+1)^{10}$ при x^3 равен 120.

Пример 2. Найти коэффициент многочлена $(3x-1)^9$ при x^2.

Имеем:

$$P(x) = (3x-1)^9;$$
$$P'(x) = 9(3x-1)^8 \cdot 3 = 27(3x-1)^8;$$
$$P''(x = 27 \cdot 8(3x-1)^7 \cdot 3 = 648(3x-1)^7.$$

Поэтому искомый коэффициент равен:

$$\frac{P''(0)}{2!} = \frac{648 \cdot (-1)^7}{1 \cdot 2} = -324.$$

Упражнения

В задачах № 1847—1851 найти коэффициенты данных многочленов при указанных степенях x.

1847. $P(x) = (x+2)^{10}$ при x^3.

1848. $P(x) = (1-x)^{40}$ при x^2.

1849. $P(x) = (2-x)^{25}$ при x^3.

1850. $P(x) = (x+a)^9$ при x^4.

1851. $P(x) = (x+1)^n$ при x^5.

1852. Определить степень многочлена $P(x) = (x+2)^n$, если его коэффициент при x^2 равен 24.

Формула бинома Ньютона § 233

До сих пор нам были известны формулы для второй и третьей степени двучлена $a+b$:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

В этом параграфе мы получим формулу для степени $(a+b)^n$ с произвольным натуральным показателем n. Для этого рассмотрим многочлен степени n

$$P(x) = (x+a)^n,$$

где a — некоторое заданное число.

Свободный член этого многочлена равен $P(0) = a^n$. Для нахождения коэффициентов при степенях x воспользуемся формулой (6) предыдущего параграфа. Согласно этой формуле коэффициент при x^k равен $\frac{P^k(0)}{k!}$, где $P^k(0)$ — значение

k-й производной многочлена $P(x)$ при $x = 0$. Найдем это значение. Имеем:

$$P(x) = (x + a)^n;$$
$$P'(x) = n(x + a)^{n-1};$$
$$P''(x) = n(n-1)(x + a)^{n-2};$$
$$P'''(x) = n(n-1)(n-2)(x + a)^{n-3}$$

и т. д. Очевидно, что k-я производная многочлена $P(x)$ равна:

$$P^k(x) = n(n-1)(n-2) \ldots (n-k+1)(x + a)^{n-k}.$$

Поэтому

$$P^k(0) = n(n-1)(n-2) \ldots (n-k+1)a^{n-k}.$$

Следовательно, коэффициент многочлена $P(x)$ при x^k равен:

$$\frac{P^{(k)}(0)}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2) \ldots (n-k+1)}{k!} a^{n-k}.$$

Выражение

$$\frac{n(n-1)(n-2) \ldots (n-k+1)}{k!}$$

принято обозначать C_n^k (читается: це из эн по ка). Поэтому коэффициент многочлена $P(x)$ при x^k равен $C_n^k a^{n-k}$. Например, коэффициент при x равен $C_n^1 a^{n-1}$, коэффициент при x^2 равен $C_n^2 a^{n-2}$ и т. д. Но в таком случае данный многочлен можно представить в виде:

$$(x + a)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}x + C_n^2 a^{n-2}x^2 + \ldots + C_n^{n-1}ax^{n-1} + C_n^n x^n.$$

Полагая в этой формуле $x = b$, получим:

$$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^n b^n. \qquad (1)$$

Отметим, что $(k + 1)$-е по счету слагаемое в разложении $(a + b)^n$ имеет вид:

$$C_n^k a^{n-k} b^k \quad (0 < k \leqslant n).$$

Формула (1) называется *формулой бинома* Ньютона*, а коэффициенты $1, C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^{n-1}, C_n^n$, участвующие в ней,—*биномиальными коэффициентами.*

Пример.

$$(a + b)^4 = a^4 + C_4^1 a^3 b + C_4^2 a^2 b^2 + C_4^3 ab^3 + C_4^4 b^4.$$

Но

$$C_4^1 = \frac{4}{1} = 4;$$
$$C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6;$$
$$C_4^3 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4;$$
$$C_4^4 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 1.$$

* Формула (1) была строго доказана еще до Ньютона Якобом Бернулли (1654—1705) — одним из членов семьи швейцарских ученых, давшей миру 11 видных математиков. Ньютону принадлежит идея о распространении формулы (1) на случай дробных и отрицательных значений n. Эта идея широко используется при решении многих задач высшей математики.

Поэтому

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Упражнения

1853. Вычислить:

а) C_5^2; б) C_6^3; в) C_8^3; г) C_7^6; д) C_{10}^4; е) C_6^5.

1854. Исходя из формулы бинома Ньютона, получить формулы для кубов суммы и разности двух чисел.

1855. Вычислить по формуле бинома Ньютона:

а) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})^4$; б) $(\sqrt{6}+\sqrt{2})^4$; в) $(\sqrt{6}-\sqrt{2})^5$; г) $(\sqrt{10}-\sqrt{2})^5$.

1856. Определить степень бинома $(3a-2)^n$, если известно, что коэффициент при a^2 в разложении этого бинома равен 216.

1857. Доказать равенства:

а) $C_n^{n-1} = C_n^1 = n$; б) $C_2^{n-2} = C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

1858. Доказать тождество: $C_n^{k+1} = C_n^k \cdot \dfrac{n-k}{k+1}$.

1859*. Доказать, что число $11^{10} - 1$ делится на 100.

Об одном свойстве биномиальных коэффициентов § 234

По определению

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot k}. \qquad (1)$$

Умножив числитель и знаменатель этой дроби на

$$(n-k)(n-k-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1,$$

получим:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k\,(n-k)(n-k-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Таким образом,

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}. \qquad (2)$$

Эта формула справедлива для любых натуральных чисел n и k, если только $n > k$. В частности, заменяя в ней k на $n-k$, получаем:

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,[n-(n-k)]!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}. \qquad (3)$$

Правые части равенств (2) и (3) равны; значит, равны и левые части:

$$C_n^k = C_n^{n-k}. \qquad (4)$$

Формула (4), выражая важное свойство биномиальных коэффициентов, значительно упрощает их вычисление. Например, при возведении двучлена

$a+b$ в 6-ю степень приходится вычислять C_6^1, C_6^2, C_6^3, C_6^4, C_6^5, C_6^6. По определению (см. формулу (1)):

$$C_6^1 = \frac{6}{1} = 6;$$

$$C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15;$$

$$C_6^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20.$$

Для вычисления C_6^4 и C_6^5 теперь нет необходимости представлять их по формуле (1). Достаточно воспользоваться формулой (4) и уже полученными значениями:

$$C_6^4 = C_6^{6-4} = C_6^2 = 15;$$

$$C_6^5 = C_6^{6-5} = C_6^1 = 6.$$

Отметим еще, что $C_n^n = 1$. Это вытекает непосредственно из определения числа C_n^n:

$$C_n^n = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-2)(n-1)n} = 1.$$

Условимся считать, что $C_n^0 = 1$. В результате такого соглашения формула (4) оказывается верной не только для $n > k$, но и для $n = k$:

$$C_n^n = C_n^0 = 1.$$

Упражнения

1860. Вычислить:

а) C_{10}^8; б) C_{15}^{12}; в) C_{100}^{96}; г) C_{36}^{34}.

1861. Известно, что $C_n^x = C_n^y$. Можно ли утверждать, что $x = y$?

1862. Решить уравнения:

а) $C_x^{x-2} + 2x = 9$; б) $C_{x-1}^{x-2} = x^2 - 13$; в) $C_n^{n-2} = C_n^3$.

1863. В разложении $\left(a + \frac{1}{a}\right)^{12}$ найти коэффициент при a^8.

1864. В разложении $\left(2a - \frac{1}{3a}\right)^{10}$ найти коэффициент при a^4.

Применение формулы бинома Ньютона к приближенным вычислениям § 235

Положив в формуле бинома Ньютона

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^n b^n$$

$a = 1$, $b = x$, получим:

$$(1+x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^{n-1}x^{n-1} + C_n^n x^n. \quad (1)$$

Если величина x мала, то величины x^2, x^3, ... , x^n тем более малы. Поэтому если в формуле (1) отбросить члены, содержащие x^2, x^3, ..., x^n, то полученная в результате формула

$$(1 + x)^n \approx 1 + C_n^1 x \tag{2}$$

будет приближенной, причем ошибка такого приближения должна быть небольшой. Поскольку $C_n^1 = n$, формулу (2) можно переписать в виде:

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx. \tag{3}$$

Практически при малых значениях x формула (3) дает вполне удовлетворительный результат. В подтверждение этого приведем следующую таблицу для случая $x = 0{,}01$.

n \ $(1+x)^n$	По формуле (3)	Значение с четырьмя верными десятичными знаками
2	1,02	1,0201
3	1,03	1,0303
4	1,04	1,0406
10	1,10	1,1046

Формула (3) верна и для малых отрицательных значений x. Например,

$$(1 - 0{,}02)^5 \approx 1 - 5 \cdot 0{,}02 = 0{,}9;$$
$$(0{,}93)^2 = (1 - 0{,}07)^2 \approx 1 - 2 \cdot 0{,}07 = 0{,}86.$$

Формулу (3) мы получили для натуральных значений n. На самом же деле ею можно пользоваться при любых действительных значениях n.

Например,

$$\sqrt{1{,}003} = (1 + 0{,}003)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}003 = 1{,}0015;$$

$$\sqrt[3]{0{,}97} = (1 - 0{,}03)^{\frac{1}{3}} \approx 1 - \frac{1}{3} \cdot 0{,}03 = 0{,}99;$$

$$\frac{1}{0{,}98} = 0{,}98^{-1} = (1 - 0{,}02)^{-1} \approx 1 + (-1)(-0{,}02) = 1{,}02;$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{0{,}96}} = 0{,}96^{-\frac{1}{4}} = (1 - 0{,}04)^{-\frac{1}{4}} \approx 1 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}04 = 1{,}01.$$

Упражнения

Найти приближенные значения следующих выражений:

1865. $(1{,}04)^3$.

1866. $(1{,}001)^{10}$.

1867. $(1{,}03)^6$.

1868. $(0{,}99)^3$.

1869. $(0{,}98)^4$.

1870. $(0{,}97)^5$.

1871. $\sqrt{1{,}05}$.

1872. $\sqrt{0{,}95}$.

1873. $\sqrt[3]{1{,}03}$.

1874. $\sqrt[5]{0{,}99}$.

1875. $\sqrt{2\sqrt{0{,}24}}$.

1876. $\left(\sqrt[3]{0{,}98}\right)^4$.

1877. $\dfrac{1}{\sqrt{0{,}98}}$.

1878. $\dfrac{1}{1{,}02}$.

1879. $\dfrac{1}{0{,}97}$.

1880. $\dfrac{1}{\left(\sqrt[4]{0{,}99}\right)^3}$.

Применение производной к нахождению участков возрастания и участков убывания функций § 236

С помощью производной легко найти участки возрастания и участки убывания любой дифференцируемой функции. Имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а. ***Если производная $f'(x)$ функции $f(x)$ положительна в интервале $[a, b]$, то функция $f(x)$ монотонно возрастает в этом интервале. Если же производная отрицательна в этом интервале, то в нем функция $f(x)$ монотонно убывает.***

Доказательство этой теоремы выходит за пределы школьной программы. Поэтому мы ограничимся лишь ее геометрической иллюстрацией.

Производная функции $y = f(x)$ при $x = x_0$ равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции $x = f(x)$ в точке с абсциссой x_0. Условие $f'(x) > 0$ означает, что в рассматриваемом интервале угловые коэффициенты касательных положительны. Но это возможно лишь в том случае, когда углы, образованные касательными с положительным направлением оси x,—острые (рис. 318). Тогда график функции $y = f(x)$ с ростом x поднимается все выше и выше. А это и означает, что функция $y = f(x)$ монотонно возрастает.

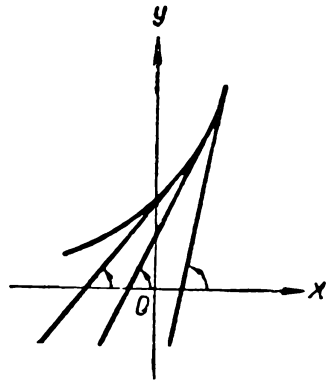

Рис. 318.

Случай, когда в интервале $[a, b]$ $f'(x) < 0$, рассматривается аналогично Условие $f'(x) < 0$ означает, что угловые коэффициенты касательных к графику функции $y = f(x)$ отрицательны. Но это возможно лишь в том случае, когда углы, образованные касательными с положительным направлением оси x,—тупые (рис. 319). Тогда график функции $y = f(x)$ с ростом x опускается все ниже и ниже. А это и означает, что функция $y = f(x)$ монотонно убывает.

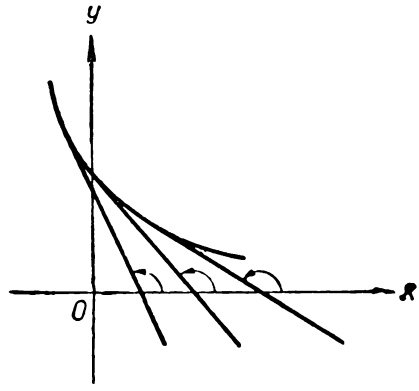

Рис. 319.

П р и м е р. Определить участки возрастания и участки убывания функции

$$f(x) = x^2 - 4x + 3.$$

Имеем: $f'(x) = 2x - 4$.

При $x > 2$ $f'(x) > 0$, а при $x < 2$ $f'(x) < 0$.

Значит, функция $f(x) = x^2 - 4x + 3$ при $x > 2$ возрастает, а при $x < 2$ убывает (рис. 320).

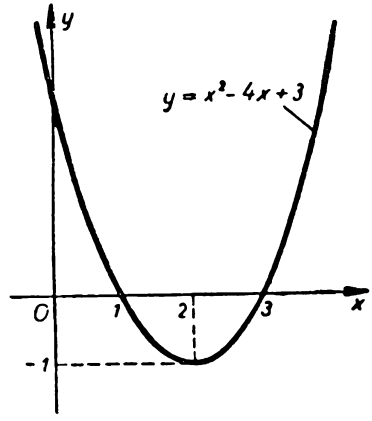

Рис. 320.

К такому же результату мы пришли бы, если бы исследовали данную функцию путем выделения полного квадрата (см. рис. 320):

$$f(x) = x^2 - 4x + 3 = x^2 - 4x + 4 - 1 = (x-2)^2 - 1.$$

Использование производной в данном случае легче и быстрее приводит к решению задачи.

Упражнения

Определить участки возрастания и участки убывания следующих функций:

1881. $y = 3 + 4x - x^2$.

1882. $y = x^3 - 3x + 1$.

1883. $y = x^4 - 2x^2 - 3$.

1884. $y = x^3 + 6x^2 - 15x + 2$.

1885. $y = x^2 - 5 - 2x - 8x^3$.

1886. $y = 3x^2 + x$.

1887. $y = \sqrt{x^3 - 3x}$.

1888. $y = x + \frac{1}{x}$.

1889. $y = \sin x - \frac{1}{2}x$.

1890. $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \cos x$.

Доказать, что данные функции (№ 1891—1894) являются монотонными на всей числовой прямой. Какие из них монотонно возрастают и какие монотонно убывают?

1891. $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 5$.

1892. $y = 6 - 6x - 2x^3 + 3x^2$.

1893. $y = \sqrt{2}\,x - \cos x$.

1894. $y = \sin x - \frac{\pi}{2}x$.

Определить участки возрастания и участки убывания следующих функций:

1895. $y = \frac{x^2 + 1}{x}$.

1896. $y = \frac{x^2}{2} + \cos x$.

1897. $y = \sin^2 x - x$.

Применение производной к нахождению локальных экстремумов функции § 237

В этом параграфе мы покажем, как с помощью производной можно находить локальные экстремумы дифференцируемой функции.

Теорема. ***Если точка $x = a$ является точкой локального экстремума дифференцируемой функции $y = f(x)$, то производная $f'(x)$ в этой точке обращается в нуль:***

$$f'(a) = 0.$$

Доказательство этой теоремы выходит за пределы школьной программы, поэтому мы ограничимся лишь ее геометрической иллюстрацией.

Пусть точка $x = a$ является точкой локального максимума функции $y = f(x)$ (рис. 321). Тогда касательная к графику этой функции в точке с абсциссой a будет параллельна оси x. Угловой коэффициент этой касательной равен 0. Но, как мы знаем, этот угловой коэффициент должен равняться $f'(a)$ Следовательно,

$$f'(a) = 0.$$

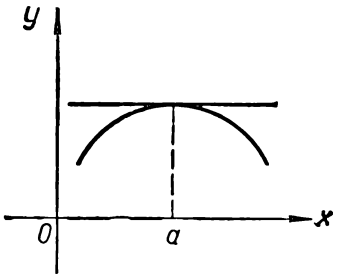

Рис. 321.

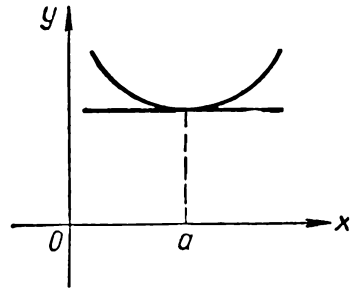

Рис. 322.

Аналогично интерпретируется случай, когда точка $x = a$ является точкой локального минимума (рис. 322).

Важно подчеркнуть, что полученное условие $f'(a) = 0$ относится лишь к функциям, *дифференцируемым* в точке $x = a$. Вообще же функция может иметь локальный экстремум в точке $x = a$ и будучи недифференцируемой в этой точке. Взгляните, например, еще раз на кривую, представленную на рисунке 274 (стр. 140). Эта кривая служит графиком функции $f(x)$, для которой точка $x = 3$ является точкой локального минимума. Но эта функция при $x = 3$ не имеет производной (кривая в точке с абсциссой 3 не имеет касательной). Поэтому условие $f'(3) = 0$ не выполняется.

Пример. Функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ имеет единственный локальный экстремум в точке $x = -\frac{b}{2a}$. В этом легко убедиться путем выделения из данного квадратного трехчлена полного квадрата (см. ч. I, § 49):

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Легко проверить, что $f'\left(-\frac{b}{2a}\right) = 0$. Действительно, поскольку $f(x) = ax^2 + bx + c$, то

$$f'(x) = 2ax + b$$

и потому

$$f'\left(-\frac{b}{2a}\right) = 0.$$

Естественно возникает вопрос: как, зная, что $x = a$ есть точка локального экстремума функции $f(x)$, определить, какой экстремум она дает: максимум или минимум?

Пусть при $x < a$ $f'(x) < 0$, а при $x > a$ $f'(x) > 0$. Тогда вблизи точки $x = a$ функция $f(x)$ должна убывать в точках, лежащих левее a, и возрастать в точках, лежащих правее a (рис. 322). В этом случае точка $x = a$ является точкой локального минимума. Если же при $x < a$ $f'(x) > 0$, а при $x > a$ $f'(x) < 0$, то, наоборот, левее точки $x = a$ функция $f(x)$ будет возрастать, а правее $x = a$ убывать. В этом случае точка $x = a$ будет точкой локального максимума (рис 321).

Итак, ***если производная $f'(x)$ в точке $x = a$ обращается в нуль, а при переходе через эту точку меняет свой знак с «—» на «+», то точка a есть точка локального минимума функции $f(x)$. Если производная $f'(x)$ в точке $x = a$ обращается в нуль, а при переходе через эту точку меняет свой знак с «+» на «—», то точка a есть точка локального максимума функции $f(x)$.***

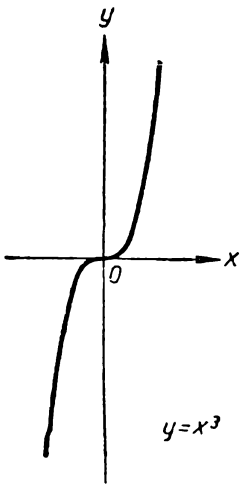

Рис 323.

Например, для функции $f(x) = ax^2+bx+c$ производная $f'(x) = 2ax+ b$ обращается в нуль при $x = -\frac{b}{2a}$. Предположим, что $a > 0$; тогда при $x < -\frac{b}{2a}$ получим:

$$2ax < -b,$$
$$2ax + b < 0,$$

а при $x > -\frac{b}{2a}$

$$2ax > -b.$$
$$2ax + b > 0.$$

Итак, если $a > 0$, то при переходе через точку $x = -\frac{b}{2a}$ производная функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ меняет знак c «—» на «+». Поэтому точка $x = -\frac{b}{2a}$ является точкой локального минимума этой функции. К такому же результату мы приходили и раньше, рассматривая выражение

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Учащимся предлагается самостоятельно с помощью производной рассмотреть случай, когда $a < 0$, и убедиться, что тогда точка $x = -\frac{b}{2a}$ является точкой локального максимума функции $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Не следует думать, что если $f'(a) = 0$, то точка $x = a$ обязательно является точкой локального экстремума. Например, для функции $f(x) = x^3$ имеем $f'(x) = 3x^2$, и поэтому $f'(0) = 0$. Но, как видно из графика этой функции (рис. 323), точка $x = 0$ не является ни точкой локального минимума, ни точкой локального максимума. Объясняется это тем, что в точке $x = 0$ производная $f'(x) = 3x^2$, обращаясь в нуль, не меняет своего знака. Как при $x < 0$, так и при $x > 0$ она положительна.

Можно доказать, что ***если $f'(a) = 0$ и при переходе через точку $x = a$ производная $f'(x)$ не меняет знака («+» переходит в «+» или «—» в «—»), то точка $x = a$ не является ни точкой локального минимума, ни точкой локального максимума.***

Точки, в которых производная $f'(x)$ функции $f(x)$ обращается в нуль, называются *стационарными точками*, а значения функции в этих точках — *стационарными значениями* этой функции.

Упражнения

Для данных функций (№ 1898—1909) найти все локальные экстремумы. По возможности выяснить, какие из них представляют собой локальные минимумы и какие — локальные максимумы:

1898. $y = 4x^2 - 6x - 7$.
1899. $y = -3x^2 - 12x + 100$.
1900. $y = (a - x)(a - 2x)$
1901. $y = (1 - ax)(1 - 2x)$
1902. $y = 2x^3 + 6x^2 - 18x + 120$.
1903. $y = 2x^3 - 6x^2 - 48x - 17$.
1904. $y = 3x^4 - 4x^3$.
1905. $y = \sin x + \cos x$.
1906. $y = \sqrt{3}\sin x - \cos x$.
1907. $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x$.
1908. $y = x^5$.
1909. $y = \sin^2 x - \cos^2 x$.

В задачах № 1910—1913 найти стационарные значения данных функций:

1910 $y = x - \sin x + \cos x$.

1911. $y = 2x + \sin x - \sqrt{3}\cos x$.

1912. $y = 5\sin x + 12\cos x - 13x$

1913. $y = \sin^2 x - \cos x$.

1914. Докажите, что функция $f(x) = |x|$ имеет в точке $x = 0$ локальный минимум. Удовлетворяется ли при этом условие $f'(0) = 0$?

1915. В конус вписан цилиндр наибольшего объема. Докажите, что радиус этого цилиндра составляет $\frac{2}{3}$ радиуса основания конуса, а высота $\frac{1}{3}$ высоты конуса.

Наименьшее и наибольшее значения функции в заданном интервале § 238

В главе IX (§ 205) мы рассмотрели вопрос о том, как отыскивается абсолютный минимум и абсолютный максимум функции $f(x)$ в интервале $[a, b]$. Среди всех локальных экстремумов и значений функции $f(x)$ в концах интервала $[a, b]$ нужно выбрать наименьшее и наибольшее значения Они и дают абсолютные экстремумы. Однако в главе IX мы не могли решить вопрос о том, как находить локальные экстремумы. Теперь же мы можем решить эту задачу

Для того чтобы найти абсолютный минимум и абсолютный максимум дифференцируемой функции $y = f(x)$ в интервале $[a, b]$, нужно:

1) из уравнения $f'(x) = 0$ найти все стационарные точки функции $f(x)$ и, выбирая те из них, которые попадают в интервал $[a, b]$, определить стационарные значения этой функции в данном интервале;

2) к стационарным значениям функции $f(x)$ в интервале $[a, b]$ добавить значения этой функции в концах этого интервала, то есть $f(a)$ и $f(b)$; среди полученных значений нужно выбрать наименьшее и наибольшее.

И вновь, как и в § 237, следует подчеркнуть, что полученный результат относится лишь к функциям, *дифференцируемым* в рассматриваемом интервале $[a, b]$. Если же в этом интервале имеются точки, в которых исследуемая функция не имеет производной, то эти точки следует рассмотреть особо. Абсолютный минимум или абсолютный максимум функции в интервале $[a, b]$ может достигаться в одной из таких точек (см. рис. 274 на стр. 140 в интервале $[2, 6]$).

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = x^3 - 3x^2$ в интервале $[1; 3]$.

Имеем: $f(x) = x^3 - 3x^2$, $f'(x) = 3x^2 - 6x$. Из уравнения $f'(x) = 0$, или $3x^2 - 6x = 0$, находим стационарные точки функции $f(x)$: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. В интервал $[1, 3]$ попадает лишь вторая точка. В ней функция принимает значение $f(2) = -4$. В крайних точках интервала $[1, 3]$ имеем: $f(1) = -2$; $f(3) = 0$. Из трех значений $f(2) = -4$, $f(1) = -2$ и $f(3) = 0$ наименьшим является -4, а наибольшим 0.

Поэтому минимальное значение функции $f(x) = x^3 - 3x^2$ в интервале $[1, 3]$ равно -4, максимальное 0. Они достигаются соответственно в точках $x = 2$ и $x = 3$.

Пример 2. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = \frac{3}{2}x + \sin x$ в интервале $[a, b]$.

Имеем:

$$f'(x) = \frac{3}{2} + \cos x.$$

Функция $f'(x)$ положительна при всех значениях x. Поэтому $f(x)$ монотонно возрастает на всей числовой прямой. В таком случае в левом конце ($x = a$) интервала $[a, b]$ эта функция должна принимать наименьшее значение $\frac{3}{2}a + \sin a$, а в правом конце ($x = b$) — наибольшее значение $\frac{3}{2}b + \sin b$.

Упражнения

1916. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^3 - 3x$ в интервалах: а) $[-0{,}5;\ 0{,}5]$; б) $[-1{,}5;\ 2]$.

1917. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = \sin x - \sqrt{3}\cos x$ в интервалах: а) $[-\pi;\ 0]$; б) $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

1918. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = \frac{x^3}{2} - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 10$ в интервалах: а) $[0;\ 1]$; б) $[0;\ 2{,}5]$; в) $[0;\ 4]$.

Найти наименьшие и наибольшие значения данных функций в указанных интервалах (№ 1919—1923):

1919. $y = \frac{1}{2}x - \sin x$ в интервалах: а) $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$; б) $\left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right]$; в) $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$.

1920. $y = x - \cos 2x$ в интервалах: а) $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$; б) $[-\pi;\ \pi]$; в) $[-\pi;\ 0]$.

1921. $y = x^4 - 8x^2 - 9$ в интервалах: а) $[-1;\ 1]$; б) $[0;\ 3]$; в) $[-3;\ 5]$.

1922. $y = 3x^4 - 4x^3 - 72x^2 + 200$ в интервалах: а) $[-1;\ 1]$; б) $[-0{,}5;\ 3{,}5]$; в) $[-2;\ 5]$.

1923. $y = 1 + 36x + 36x^2 - 2x^3$ в интервалах: а) $[-3;\ -1]$; б) $[-2;\ 2]$; в) $[-10;\ 4]$.

Использование производных для исследования дифференцируемых функций и построения их графиков — § 239

Использование производных значительно облегчает исследование *дифференцируемых* функций и построение их графиков. С помощью производной можно установить интервалы возрастания и интервалы убывания функций, найти стационарные точки и локальные экстремумы. А это позволяет более точно построить графики исследуемых функций.

В дальнейшем мы будем придерживаться следующего плана* исследования функции $y = f(x)$:

1) область определения функции;

2) поведение функции вблизи «особых» точек (например, функции $y = \frac{1}{x}$ вблизи точки $x = 0$);

3) четность функции;

* Этот план лишь незначительно отличается от плана, описанного в § 210.

4) периодичность функции;
5) стационарные точки и локальные экстремумы функции;
6) интервалы возрастания и интервалы убывания функции;
7) нули функции, то есть корни уравнения $f(x) = 0$;
8) интервалы знакопостоянства функции;
9) поведение функции при неограниченном возрастании значений аргумента ($x \to \infty$) и при неограниченном убывании значений аргумента ($x \to -\infty$);
10) область изменения функции.

Осуществление каждого пункта этого плана полезно сопровождать геометрической интерпретацией, выполняя шаг за шагом построение графика исследуемой функции.

В качестве примера рассмотрим функцию

$$y = x^4 - 10x^2 + 9.$$

1) Областью определения данной функции является множество всех действительных чисел.

2) «Особых» точек (типа точки $x = 0$ для функции $y = \frac{1}{x}$) эта функция не имеет.

3) Функция четна, поскольку при любом значении x

$$(-x)^4 - 10(-x)^2 + 9 = x^4 - 10x^2 + 9.$$

Это должно найти свое отражение и в графике функции. Он должен получиться симметричным относительно оси ординат.

4) Рассматриваемая функция, очевидно, непериодична.

Вообще периодичность той или иной функции часто устанавливается путем простого указания на периодические составляющие этой функции (например, $\sin x$, $\cos x$ и т. п.). Данная функция подобных составляющих не имеет. Конечно, это не может служить строгим доказательством непериодичности рассматриваемой функции. Поэтому мы еще вернемся к этому вопросу при рассмотрении пункта 6.

(Впрочем, возможно и такое доказательство непериодичности. Если бы данная функция была периодической с периодом $T > 0$, то при любом значении x выполнялось бы равенство

$$(x + T)^4 - 10(x + T)^2 + 9 = x^4 - 10x^2 + 9.$$

В частности, при $x = 0$ мы получили бы

$$T^4 - 10T^2 + 9 = 9,$$

откуда $T = \sqrt{10}$. Таким образом, в качестве периода может выступать лишь число $\sqrt{10}$. Но, как мы знаем, периодические функции имеют бесконечно много положительных периодов Получено противоречие. Следовательно, предположение о периодичности данной функции неверно.)

5) Стационарные точки функции $f(x)$ находятся как корни уравнения $f'(x) = 0$ В данном случае $f'(x) = 4x^3 - 20x$; поэтому нам нужно решить уравнение

$$4x^3 - 20x = 0.$$

Оно имеет три корня:

$$x_1 = 0;$$
$$x_2 = -\sqrt{5};$$
$$x_3 = \sqrt{5}.$$

Чтобы выяснить, какие из этих трех стационарных точек дают локальные эк-

стремумы и какие именно экстремумы (минимумы или максимумы), рассмотрим поведение производной $f'(x)$ вблизи стационарных точек. Имеем:

$$f'(x) = 4x^3 - 20x = 4x(x^2 - 5).$$

Если x близко к нулю и $x < 0$, то оба сомножителя $4x$ и $x^2 - 5$ отрицательны. В этом случае $f'(x) > 0$. Если же x близко к нулю и $x > 0$, то множитель $4x$ будет положительным, а множитель $x^2 - 5$ — отрицательным. В этом случае $f'(x) < 0$.

При переходе через точку $x = 0$ производная $f'(x)$ меняет знак с «+» на «—». Поэтому точка $x = 0$ является точкой локального максимума функции $y = x^4 - 10x + 9$.

Аналогично устанавливается (сделайте это самостоятельно), что точки $x = -\sqrt{5}$ и $x = \sqrt{5}$ являются точками локальных минимумов.

Теперь можно найти и сами локальные экстремумы. При $x = 0$ $y = 9$; при $x = \pm\sqrt{5}$ $y = -16$.

Итак, функция $y = x^4 - 10x^2 + 9$ имеет один локальный максимум, равный 9 (он достигается при $x = 0$), и два локальных минимума, каждый из которых равен —16 (они достигаются при $x = -\sqrt{5}$ и $x = \sqrt{5}$). Это позволяет нам

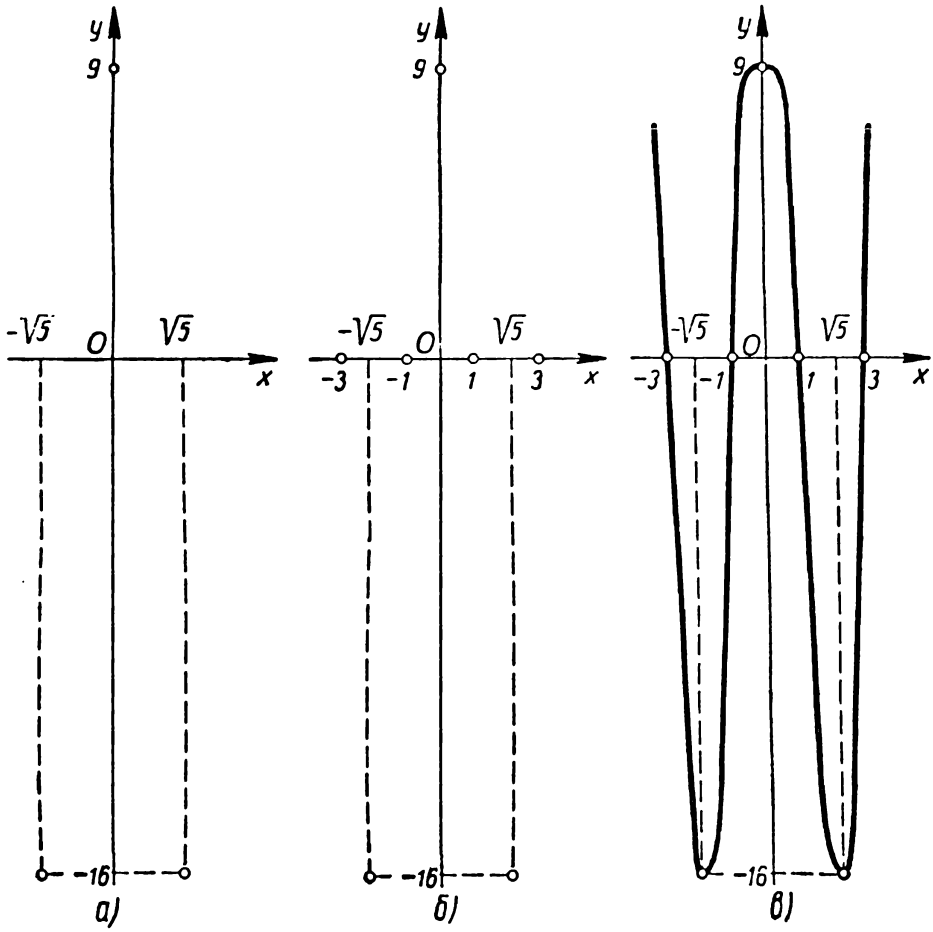

Рис 324.

отметить на координатной плоскости три точки графика нашей функции. Это будут точки с координатами $(0,9)$, $(-\sqrt{5}, -16)$ и $(\sqrt{5}, -16)$, причем первая из них служит геометрическим образом локального максимума, а остальные две — геометрическими образами локальных минимумов данной функции (рис. 324, *а*).

6) Найдем интервалы возрастания и интервалы убывания рассматриваемой функции. После исследования стационарных точек легко понять, что при $-\sqrt{5} < x < 0$ и $x > \sqrt{5}$ эта функция возрастает, а при $x < -\sqrt{5}$ и $0 < x < \sqrt{5}$ убывает (см. рис. 324, *а*). Но это, конечно, можно доказать и строго, не обращаясь к геометрической интуиции.

Действительно, производная

$$f'(x) = 4x(x^2 - 5)$$

при $-\sqrt{5} < x < 0$ и $x > \sqrt{5}$ положительна, а при $x < -\sqrt{5}$ и $0 < x < \sqrt{5}$ отрицательна. А это и служит доказательством того, что́ выше мы подметили, исходя из геометрических соображений.

Полученный результат, между прочим, доказывает (и притом вполне строго), что функция $y = x^4 - 10x^2 + 9$ непериодична. Действительно, при $x > \sqrt{5}$ она монотонно возрастает и, следовательно, значения ее не могут повторяться периодически.

7) Нули данной функции находятся из уравнения

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0.$$

Оно имеет четыре корня:

$$x_1 = -3,$$
$$x_2 = -1,$$
$$x_3 = 1,$$
$$x_4 = 3.$$

(Симметричность этих корней вполне понятна: ведь рассматриваемая функция четна.)

Теперь мы можем отметить на плоскости координат еще четыре точки, принадлежащие графику нашей функции. Это точки оси x с абсциссами -3, -1, 1 и 3 (см. рис. 324, *б*).

8) Очевидно, что между любыми двумя соседними нулями функция $f(x)$ сохраняет свой знак постоянным*. Так, при $-3 < x < -1$ она принимает либо только положительные, либо только отрицательные значения. Чтобы выяснить, какие именно (по знаку) значения принимает наша функция при $-3 < x < -1$, достаточно определить ее знак в какой-нибудь одной точке этого интервала. В данном случае удобно выбрать $x = -\sqrt{5}$ — точку локального минимума. В ней, как было указано выше, функция принимает значение, равное -16. Поэтому всюду в интервале $-3 < x < -1$ наша функция принимает отрицательные значения.

Аналогично можно установить (сделайте это самостоятельно!), что при $-1 < x < 1$ наша функция принимает положительные значения, а при $1 < x < 3$ — отрицательные значения. Что касается значения функции при $|x| > 3$, то все они будут положительными.

9) При неограниченном возрастании x $(x \to \infty)$ и неограниченном убывании x $(x \to -\infty)$ значения функции $y = x^4 - 10x^2 + 9$ неограниченно возрастают $(y \to \infty)$. Этот факт является очевидным, поскольку с ростом x величина x^4 растет гораздо быстрее, чем $10x^2$. Возможно и такое объяснение:

$$x^4 - 10x^2 + 9 = (x^2 - 1)(x^2 - 9).$$

---

* Это «очевидное» утверждение может быть доказано и совсем строго. Однако доказательство выходит за пределы нашей программы.

Когда $x \to \infty$ или $x \to -\infty$, то каждый из сомножителей $x^2 - 1$ и $x^2 - 9$ неограниченно растет. Поэтому неограниченно растет и их произведение.

10) Теперь нетрудно определить область изменения исследуемой функции. Минимальное значение, равное -16, функция принимает в двух точках: $x = -\sqrt{5}$ и $x = \sqrt{5}$. Максимального значения она не имеет: при неограниченном росте x (по абсолютной величине) неограниченно растут и значения функции. Поэтому область изменения функции $y = x^4 - 10x^2 + 9$ определяется неравенством $y \geqslant -16$.

График функции $y = x^4 - 10x^2 + 9$ представлен на рисунке 324, *в*.

Упражнения

Исследовать данные функции (№1924 — 1930) и построить их графики:

1924. $y = x^4 - 2x^2 - 3$.

1925. $y = \frac{1}{10}(x^4 - 13x^2 + 36)$.

1926. $y = x^3 - 9x$.

1927. $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

1928. $y = \frac{1}{2}x + \sin x$.

1929. $y = \sqrt{3}\cos x - 2x$.

1930*. $y = \sin^2 x + 2\cos x + \frac{1}{4}$.

Применение производной к графическому решению уравнений — § 240

Вопрос о применении производной к графическому решению уравнений мы рассмотрим на примере уравнения $\sin x = x$.

Для решения этого уравнения на одном и том же чертеже построим графики функций $y = \sin x$ и $y = x$ (рис. 325). Эти графики пересекаются в точке с абсциссой $x = 0$. Поэтому $x = 0$ есть корень данного уравнения.

Можем ли мы быть уверены, что других корней этого уравнения не существует? Может быть, вблизи точки $x = 0$ имеется еще какая-нибудь точка пересечения графиков, которую мы просто не замечаем? Ведь нельзя же, например, при выбранном на рисунке 325 масштабе «графически» убедиться, что 0,01 не корень уравнения $\sin x = x$. К тому же, если мы заглянем в тригонометрические таблицы, то обнаружим, что $\sin 0{,}01 \approx 0{,}01$; $\sin 0{,}02 \approx 0{,}02$; $\sin 0{,}03 \approx 0{,}03$, ... Так что пока у нас нет оснований считать, что $x = 0$ — единственный корень уравнения $\sin x = x$.

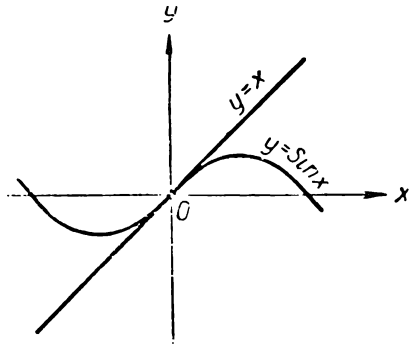

Рис. 325.

Чтобы разобраться в данном вопросе, заметим, что $(\sin x)' = \cos x$, а $(x)' = 1$. Для любого острого угла x $\cos x < 1$. Поэтому на участке $0 < x < \frac{\pi}{2}$ скорость изменения функции $y = x$ больше скорости изменения функции $y = \sin x$. Но в таком случае при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ функция $y = x$ будет всегда «опережать» функцию $y = \sin x$. Следовательно, никакое число из интервала $0 < x < \frac{\pi}{2}$ не может служить корнем уравнения $\sin x = x$. Тем более не может быть корнем уравнения

и $x \geqslant \frac{\pi}{2}$, поскольку $\sin x \leqslant 1$. Таким образом, данное уравнение не имеет положительных корней.

Если бы существовал отрицательный корень этого уравнения $-a$, то мы имели бы $\sin(-a) = -a$, откуда $\sin a = a$. Но это означало бы, что уравнение $\sin x = x$ имеет положительный корень $x = a$.

Получено противоречие. Значит, уравнение $\sin x = x$ не может иметь отрицательных корней. Остается признать, что число $x = 0$ является единственным корнем этого уравнения.

Упражнения

1931. Доказать, что единственным корнем уравнения $\cos x = \frac{\pi}{2} - x$ является $x = \frac{\pi}{2}$.

Решить графически уравнения:

1932. $\sin x = -x - \pi$.

1933. $\cos x = x - \frac{3}{2}\pi$.

Исторические замечания § 241

Тот раздел математики, который изучает производные функций и их применения, называется *дифференциальным исчислением*. Это исчисление возникло из решения задач на проведение касательных к кривым, на вычисление скорости движения, на отыскание наибольших и наименьших значений функций.

Отдельные результаты в дифференциальном исчислении были получены уже давно. Однако до конца XVII века не удавалось выделить основных понятий, лежащих в основе данного вопроса. Поэтому, хотя почва для создания нового исчисления была подготовлена, исчисления, как такового, еще не было.

В систематической форме дифференциальное исчисление впервые было изложено по-разному и независимо друг от друга Ньютоном и Лейбницем. Ньютон изложил свои взгляды на новое исчисление в работе «Метод флюксий и бесконечных рядов». Этот трактат был составлен около 1671 г., но вышел в свет лишь в 1736 г. — уже после смерти автора. Первая печатная работа Лейбница по дифференциальному исчислению относится к 1684 г.

Автором первого курса по дифференциальному исчислению был представитель школы Лейбница французский математик Лопиталь (1661—1704). Этот курс под названием «Анализ бесконечно малых» вышел в свет в 1696 г.

Современной трактовке дифференциального исчисления положил начало Коши.

Термин «производная» был введен французским математиком Лагранжем (1736—1813).

Задачи на повторение

1934. Найти значения производной от функции $y = \frac{1}{4}x^4 - 4x^3 + 16$ в точках $x = 0$ и $x = 2$.

1935. Найти значения производной от функции $y = (3x + 5)(2x^2 - 1)$ в точках $x = -1$ и $x = 0$.

1936. Найти значения второй производной от функции $y = 5\sin x - 3\cos x$ в точках $x = \frac{\pi}{3}$ и $x = -\frac{\pi}{2}$.

1937. Точка движется по закону $s(t) = t^3$ (s — путь в метрах, t — время в секундах). В какой момент времени ее мгновенная скорость равна средней скорости движения в интервале от $t_1 = 13$ *сек* до $t_2 = 46$ *сек*?

1938. Точка движется по закону $s(t) = 15 - (5 - t)(3 - t)$ до тех пор, пока ее скорость не обратится в нуль. Какой путь пройдет при этом точка?

1939. Одна точка движется по закону $s_1(t) = 13t + t^2$, а другая — по закону $s_2(t) = 3t^2 + t$, где s_1 и s_2 — длины путей в метрах, t — время в секундах. Найти скорости движения точек в тот момент, когда пути их равны.

1940. Найти уравнение касательной к кривой $y = 3x^3 + 2x + 5$ в точке пересечения этой кривой с осью ординат.

1941. Найти уравнение касательной к кривой $y = 8x^3 - 1$ в точке пересечения этой кривой с осью абсцисс.

1942. Какой угол образуется при пересечении прямой $x = \frac{5}{4}\pi$ с синусоидой $y = \sin x$?

1943. Какие углы образуются при пересечении прямой $y = \frac{1}{2}$ с косинусоидой $y = \cos x$?

1944. Найти координаты вершин парабол:

а) $y = 3x^2 - 6x + 7$; б) $y = 2x^2 + 8x - 3$.

1945. В разложении $\left(\frac{x}{3} - \frac{3}{x}\right)^{12}$ найти тот член, который содержит x^4.

1946. Доказать тождество $1 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$. (Указание. В формуле бинома Ньютона положить $a = b = 1$.)

1947. Сколько рациональных членов содержит разложение $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{100}$?

Исследовать функции и построить их графики (№ 1948—1955):

1948. $y = \frac{1}{16}x^4 - \frac{5}{2}x^2 + 9$.

1949. $y = 2x^2 - x - 1$.

1950. $y = x - x^4$.

1951. $y = x + \sin x$.

1952. $y = \sin^2 \frac{x}{2}$.

1953*. $y = 0{,}5x^2 + \cos x$

1954. $y = \sin x\,(1 + \cos x)$.

1955*. $y = 4\cos^2 x - 4\sqrt{3}\sin x + 5$.

1956. Известно, что прочность балки с прямоугольным сечением прямо пропорциональна ширине и квадрату длины сечения. Найти размеры сечения балки наибольшей прочности, которую можно выпилить из круглого бревна, имеющего диаметр в d сантиметров.

Найти производные следующих функций (№ 1957—1963):

1957. $y = \frac{1}{2x + 5}$.

1958. $y = \sqrt{3 - x}$.

1959. $y = (x - 3)^3 + \frac{1}{(x - 3)^3}$.

1960. $y = \sin^2 2x + \cos \frac{x}{2}$.

1961. $y = (x^2 + 1)\cos x - (x^2 - 1)\sin x$.

1962. $y = \frac{1}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}$.

1963. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

1964. Доказать, что кривые $y = \cos^2 x + \sin 2x$ и $y = -5x^2 + 3x + 1$ касаются друг друга в точке $x = 0$. (Касание кривых в некоторой точке означает, что они имеют общую касательную в этой точке.)

1965. В шар радиуса r вписан цилиндр наибольшего объема. Чему равен этот объем?

1966*. Доказать, что биномиальные коэффициенты — числа целые.

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА XI

Числовые поля § 242

Понятие числа прошло длинный путь исторического развития. В главе II (см. ч. I) мы рассказали о том, как от простейших, натуральных чисел человек пришел к более сложным, действительным числам. Сейчас мы хотим вернуться к рассмотрению этого вопроса. Но при этом нам придется несколько отступить от того порядка, в котором исторически развивалось понятие числа.

Одним из простейших числовых множеств является множество натуральных чисел

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

В нем всегда выполнимы два основных алгебраических действия: сложение и умножение. Это означает, что, каковы бы ни были натуральные числа m и n, сумма их $m + n$, а также произведение $m \cdot n$ являются непременно натуральными числами. При этом соблюдаются следующие пять законов:

1) коммутативный закон сложения:

$$m + n = n + m;$$

2) ассоциативный закон сложения:

$$(m + n) + k = m + (n + k);$$

3) коммутативный закон умножения:

$$m \cdot n = n \cdot m;$$

4) ассоциативный закон умножения:

$$(m \cdot n) \cdot k = m \cdot (n \cdot k);$$

5) дистрибутивный закон умножения относительно сложения:

$$(m + n) \cdot k = m \cdot k + n \cdot k.$$

Что касается вычитания и деления, то эти два действия в множестве натуральных чисел выполнимы не всегда. Так, ни одна из разностей 3—5 и 2—2, а также ни одно из частных $3 : 5$ и $7 : 4$ нельзя выразить никаким натуральным числом.

Чтобы действие вычитания было выполнимым всегда, множество натуральных чисел нужно расширить путем присоединения к нему всех отрицательных целых чисел и нуля. В результате такого расширения мы приходим к *множеству всех целых чисел*:

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Числовое множество, в котором всегда выполнимы сложение и умножение, подчиненные указанным выше пяти законам, а также вычитание, называется кольцом. Таким образом, ***множество всех целых чисел образует кольцо.***

Расширив множество всех натуральных чисел до множества всех целых чисел, мы добились тем самым, что действие вычитания стало выполнимым всегда. Но деление по-прежнему осталось, вообще говоря, невыполнимым. Чтобы устранить этот пробел, нужно расширить и множество всех целых чисел. Сделать это можно путем присоединения к нему всех обыкновенных дробей, то есть чисел вида $\frac{m}{n}$, где m и n — произвольные целые числа и $n \neq 0$. В результате такого расширения мы получаем *множество всех рациональных чисел.* Как было показано во второй главе, в этом числовом множестве всегда выполнимы действия сложения, умножения, вычитания и деления (кроме деления на нуль), причем первые два из них подчинены пяти основным законам сложения и умножения.

Множество чисел, в котором всегда выполнимы действия сложения и умножения, подчиненные пяти основным законам, а также действия вычитания и деления (кроме деления на нуль), называется полем. ***Множество всех рациональных чисел является простейшим числовым полем.***

Уместно сразу же заметить, что множество всех иррациональных чисел поля не образует. Действительно, любое из четырех действий (сложение, умножение, вычитание и деление) над иррациональными числами может привести к числу рациональному. Так, например,

$$\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0,$$
$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$$

и т. д. А вот множество всех действительных чисел образует поле. Как указывалось во второй главе, действия сложения, умножения, вычитания и деления действительных чисел (кроме деления на нуль) не выводят нас за пределы действительных чисел, причем сложение и умножение подчинены пяти основным законам.

Приведем еще один, более сложный, пример числового поля. Рассмотрим все действительные числа вида $r + s\sqrt{2}$, где r и s — рациональные числа. Пусть $a + b\sqrt{2}$ и $c + d\sqrt{2}$ — произвольные два числа рассматриваемого вида. Тогда

$$(a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2})=(a+c)+(b+d)\sqrt{2},$$
$$(a+b\sqrt{2})-(c+d\sqrt{2})=(a-c)+(b-d)\sqrt{2},$$
$$(a+b\sqrt{2})\cdot(c+d\sqrt{2})=ac+ad\sqrt{2}+bc\sqrt{2}+2bd=$$
$$=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}.$$

Предположим теперь, что число $c+d\sqrt{2}$ не равно нулю. Тогда, очевидно, и сопряженное ему число $c-d\sqrt{2}$ будет отлично от нуля (докажите это!). Поэтому можно написать:

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}=\frac{(a+b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}{(c+d\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}=\frac{(ac-2bd)+(bc-ad)\sqrt{2}}{c^2-2d^2}=$$
$$=\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}+\frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2}.$$

Как мы видим, каждое из четырех действий (сложение, вычитание, умножение и деление) над числами вида $r+s\sqrt{2}$ приводит к числу того же самого вида. Ясно также, что сложение и умножение всех этих чисел подчинено каждому из пяти указанных выше законов. Поэтому совокупность всех чисел вида $r+s\sqrt{2}$, где и r и s — рациональные числа, образует числовое поле.

Упражнения

1967. Образует ли кольцо:
а) множество всех четных чисел;
б) множество всех нечетных чисел;
в) множество всех чисел, кратных некоторому числу p?

1968. Образует ли поле:
а) множество всех дробей со знаменателем 3;
б) множество всех дробей, знаменатели которых есть целые степени числа 3?

1969. Докажите, что множество всех конечных десятичных дробей образует кольцо, но не образует поле.

1970. Докажите, что любое числовое поле либо совпадает с множеством всех рациональных чисел, либо содержит в себе это множество.

1971. Докажите, что множество всех чисел вида $a+b\sqrt{3}$, где a и b — рациональные числа, является полем. Содержит ли это поле:
а) все рациональные числа;
б) все иррациональные числа;
в) все действительные числа?

Постановка задачи о расширении поля действительных чисел. Комплексные числа § 243

Потребности математики уже давно указывали на серьезную необходимость расширения поля действительных чисел. Как мы знаем, в нем, помимо сложения, вычитания, умножения и де-

ления, выполнимо еще действие возведения в степень, представляющее собой не что иное, как многократное умножение. А вот извлечение корней, то есть действие, обратное возведению в степень, выполнимо не всегда. Мы не знаем, например, какой смысл можно придать выражениям $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-16}$. Поэтому в поле действительных чисел не разрешимы даже такие на первый взгляд простые уравнения, как $x^2 + 1 = 0$, $x^4 + 16 = 0$ и т. д.

Таким образом, мы приходим к необходимости *расширить поле действительных чисел путем присоединения к нему новых чисел так, чтобы расширенное множество образовывало числовое поле, в котором всегда было бы выполнимо действие извлечения корней.*

Окончательно эта задача была решена лишь в XIX столетии.

Посмотрим, какие же элементы должно содержать новое, расширенное поле.

Прежде всего оно должно содержать все действительные числа. Далее, в нем должно быть разрешимо уравнение $x^2 = -1$, поскольку действие, обратное возведению в степень, в этом поле выполнимо. *Число, квадрат которого равен* -1, *принято обозначать буквой* i *и называть мнимой единицей.* Итак, по определению числа i

$$i^2 = -1.$$

Мы требуем, чтобы новое множество чисел было полем. Поэтому наряду с действительным числом b и мнимой единицей i ему должно принадлежать и их произведение bi. Точно так же вместе с действительным числом a и произведением bi новому числовому полю должна принадлежать и их сумма $a + bi$. Таким образом, новое множество чисел должно содержать все числа вида

$$a + bi,$$

где a и b — произвольные действительные числа, а i — мнимая единица. Эти числа мы назовем *комплéксными числами.*

Число a принято называть *действительной частью*, а выражение bi — *мнимой частью* комплексного числа $a + bi$. Число b называется *коэффициентом при мнимой части.* Например, для комплексного числа $2 + 3i$ действительной частью является число 2, а мнимой — выражение $3i$; коэффициент при мнимой части равен 3. Для числа $0 - 3i$ действительной частью является число 0, а мнимой — выражение $-3i$; коэффициент при мнимой части равен -3. Для числа $5 + 0i$ действительной частью является число 5, а мнимой — выражение $0i$; коэффициент при мнимой части равен нулю.

Два комплексных числа считаются равными, если равны их действительные части и коэффициенты при мнимых частях. Другими словами,

$$a + bi = c + di$$

тогда и только тогда, когда $a = c$, $b = d$.

Как мы знаем, для неравных действительных чисел определены соотношения «больше» и «меньше». Так, $5 > 4$, $0 < 7$ и т. д. Для неравных комплексных чисел такие соотношения определить невозможно. Нельзя, например, сказать, какое из двух чисел больше: $2 + 3i$ или $5 - 7i$, $0 + 2i$ или $0 + 4i$ и т. д.

Упражнения

1972. Что значит, что два комплексных числа $a + bi$ и $c + di$: а) равны друг другу; б) не равны друг другу?

1973. Найти действительные числа x и y из уравнений:

а) $(x - y) + (3x + y)\,i = 3 - 3i$;

б) $(x - 5y) + (2x - y)\,i = 6 + 3i$.

Сложение комплексных чисел. Противоположные числа — § 244

О п р е д е л е н и е. *Суммой двух комплексных чисел* $a + bi$ *и* $c + di$ *называется комплексное число* $(a + c) + (b + d)i$:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

Другими словами, *при сложении комплексных чисел их действительные части и коэффициенты при мнимых частях складываются.*

П р и м е р ы.

1) $(1 + i) + (2 + 3i) = (1 + 2) + (1 + 3)\,i = 3 + 4i$;

2) $(5 + 6i) + (7 - 6i) = (5 + 7) + (6 - 6)\,i = 12 + 0i$;

3) $(4 + 9i) + (-4 + i) = (4 - 4) + (9 + 1)\,i = 0 + 10i$;

4) $(3 - 7i) + (-3 + 7i) = (3 - 3) + (-7 + 7)\,i = 0 + 0i$.

В области действительных чисел имеется число «нуль», прибавление которого к любому другому действительному числу не меняет этого числа:

$$a + 0 = a.$$

В области комплексных чисел аналогичную роль играет число $0 + 0i$. Действительно, каково бы ни было комплексное число $a + bi$,

$$(a + bi) + (0 + 0i) = (a + 0) + (b + 0)\,i = a + bi.$$

Как мы знаем, два действительных числа a и $-a$, сумма которых равна нулю, называются противоположными. По аналогии с этим комплексные числа $a + bi$ и $-a - bi$ также называются *противоположными.*

Упражнения

1974. (У с т н о.) Назвать комплексные числа, противоположные данным:

а) $3 + i$; б) $1 - 5i$; в) $-2 + 0i$; г) $0 + 4i$; д) $0 + 0i$; е) $7 + i$.

1975. Найти действительные числа x и y из уравнений:

а) $(5x + 3yi) + (2y - xi) = 3 - i$;

б) $(2x - 5i) + (7y + 2xi) = -12 + 3yi$;

в) $(x + 3yi) + \left(\frac{3}{2}y + 2xi\right) = 4 + 8i$.

Вычитание комплексных чисел § 245

Определение. *Разностью двух комплексных чисел* $z_1 = a + bi$ *и* $z_2 = c + di$ *называется такое комплексное число* $z_3 = x + yi$, *которое в сумме с* z_2 *дает* z_1.

Другими словами, для комплексных чисел, так же как и для действительных, равенство

$$z_3 = z_1 - z_2$$

по определению означает то же самое, что и равенство

$$z_3 + z_2 = z_1.$$

Само по себе введенное нами определение не гарантирует, что из каждого комплексного числа можно вычесть любое другое комплексное число. Возможность такого вычитания и его однозначность устанавливаются следующей теоремой.

Теорема. ***Для любых комплексных чисел*** $z_1 = a + bi$ ***и*** $z_2 = c + di$ ***разность*** $z_3 = z_1 - z_2$ ***определена и притом однозначно.***

Фактически нужно доказать, что существует и притом единственное комплексное число $z_3 = x + yi$, которое в сумме с z_2 дает z_1:

$$(c + di) + (x + yi) = (a + bi). \qquad (1)$$

По определению суммы комплексных чисел:

$$(c + di) + (x + yi) = (c + x) + (d + y)\,i.$$

Поэтому уравнение (1) можно переписать в виде:

$$(c + x) + (d + y)\,i = a + bi.$$

Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительные части и коэффициенты при мнимых частях. Поэтому

$$\begin{cases} c + x = a, \\ d + y = b. \end{cases}$$

Эта система уравнений всегда имеет и притом единственное решение:

$$x = a - c, \qquad y = b - d.$$

Поэтому существует и притом единственная пара действительных чисел (x, y), удовлетворяющая уравнению (1). Тем самым теорема доказана.

По существу мы доказали, что

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

Чтобы из одного комплексного числа вычесть другое, достаточно это вычитание произвести отдельно для действительных частей этих чисел и коэффициентов при мнимых частях.

Примеры.

1) $(5 + 6i) - (3 + 7) = (5 - 3) + (6 - 7)i = 2 - i$;
2) $(2 + i) - (9 + i) = (2 - 9) + (1 - 1)\,i = -7 + 0i$;
3) $(3 + 4i) - (3 - i) = (3 - 3) + (4 + 1)\,i = 0 + 5i$;
4) $(7 - i) - (7 - i) = (7 - 7) + (-1 + 1)\,i = 0 + 0i$.

Упражнения

1976. Что выражает каждая из данных формул — определение или теорему:

а) $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)\,i$;

б) $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)\,i$?

1977. Найти действительные числа x и y из уравнений:

а) $(0 + 3xi) - (10x + 2yi) = -5y + 3i$;

б) $\left(-3y + \frac{1}{2}\,xi\right) - (-8x + 5yi) = -2 + 12i$;

в) $\left(\frac{3}{4}\,x - 2yi\right) - \left(\frac{1}{3}\,y + 6xi\right) = 0 + 21i$.

Умножение комплексных чисел § 246

Естественно потребовать, чтобы умножение комплексных чисел $a + bi$ и $c + di$ выполнялось так же, как и умножение двучленов с действительными коэффициентами, а именно:
$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + (ad + bc)\,i + bdi^2$.
Но по определению числа i

$$i^2 = -1.$$

Поэтому $bdi^2 = -bd$ и, следовательно,

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)\,i. \qquad (1)$$

Эта формула и кладется в основу определения произведения двух комплексных чисел.

Определение. *Произведением двух комплексных чисел* $a + bi$ *и* $c + di$ *называется комплексное число* $(ac - bd) + (ad + bc)i$.

Для того чтобы уметь умножать комплексные числа друг на друга, формулу (1) помнить не обязательно. Нужно лишь знать, что она дает такой же результат, как и простое умножение двучленов $a + bi$ и $c + di$ с последующей заменой i^2 на -1.

Примеры.

1) $(2 + 3i)(6 - 5i) = 12 - 10i + 18i - 15i^2 = (12 + 15) + (18 - 10)i = 27 + 8i$;

2) $(4 + i)(4 - i) = 16 - 4i + 4i - i^2 = (16 + 1) + (-4 + 4)i = 17 + 0i$;

3) $(1 + i)^2 = (1 + i)(1 + i) = 1 + i + i + i^2 = (1 - 1) + 2i = 0 + 2i$.

Как мы знаем, в области действительных чисел нуль обладает тем свойством, что произведение его с любым другим действительным числом равно нулю:

$$a \cdot 0 = 0.$$

Учащиеся без особого труда могут убедиться в том, что в множестве комплексных чисел аналогичным свойством обладает число $0 + 0i$. Для любого комплексного числа $a + bi$

$$(a + bi)(0 + 0i) = 0 + 0i.$$

Упражнения

Вычислить (№ 1978—1987):

1978. $(5 + i)(-2 + 3i)$.

1979. $(3 + 4i)(6 - 5i)$.

1980. $(7 - 2i)(3{,}5 - i)$.

1981. $(0{,}5 + 0{,}2i)(2 + 3i)$.

1982. $(7 + 4i)^2$.

1983. $(5 + i)(15 - 3i)$.

1984. $(-6 + 2i)(11 + 5i)$.

1985. $(0{,}5 + i)(1 + 2i)$.

1986. $(\sqrt{2} - i)(\sqrt{3} + 2i)$.

1987. $(\sqrt{3} + 5i)(5 - \sqrt{3}i)$.

1988. Найти комплексное число z из уравнения

$$(2 - 3i) \cdot z = -1 - 5i.$$

Деление комплексных чисел § 247

В области комплексных чисел так же, как и в области действительных чисел, соотношение

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} \quad (z_2 \neq 0 + 0i)$$

понимается в том смысле, что $z_3 \cdot z_2 = z_1$.

Определение. *Частным от деления комплексного числа z_1 на комплексное число $z_2 \neq 0 + 0i$ называется такое комплексное число z_3, которое при умножении на z_2 дает z_1.*

В области действительных чисел частное $\frac{a}{b}$ определено для всех значений a и b, если только $b \neq 0$. Аналогично обстоит дело и в области комплексных чисел.

Теорема. ***Частное $\frac{a+bi}{c+di}$ определено и притом однозначно для всех комплексных чисел $a + bi$ и $c + di$, если только $c + di \neq 0 + 0i$.***

Доказательство. Нам нужно показать, что если $c+di \neq 0+0i$, то существует и притом единственная пара действительных чисел (x, y), удовлетворяющая уравнению

$$(x+yi)(c+di)=a+bi. \tag{1}$$

По правилу умножения комплексных чисел

$$(x+yi)(c+di)=(xc-yd)+(xd+yc)i.$$

Поэтому уравнение (1) можно переписать в виде:

$$(xc-yd)+(xd+yc)i=a+bi.$$

Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительные части и коэффициенты при мнимых частях. Поэтому

$$\begin{cases} cx-dy=a, \\ dx+cy=b. \end{cases} \tag{2}$$

Вычислим главный определитель этой системы:

$$\Delta=\begin{vmatrix} c & -d \\ d & c \end{vmatrix}=c^2+d^2.$$

Поскольку $c+di \neq 0+0i$, хотя бы одно из чисел c и d отлично от нуля. Но тогда $\Delta=c^2+d^2>0$. Следовательно, по правилу Крамера (см. § 30, ч. I) система уравнений (2) имеет и притом единственное решение:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} a & -d \\ b & c \end{vmatrix}}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2},$$

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} c & a \\ d & b \end{vmatrix}}{c^2+d^2}=\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

Итак,

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

Запоминать эту формулу не нужно; достаточно знать, как она получается.

Пример. Найти отношение $\dfrac{9-7i}{2-3i}$.

Пусть

$$\frac{9-7i}{2-3i}=x+yi.$$

Тогда

$$\begin{aligned} &(x+yi)(2-3i)=9-7i, \\ &2x+2yi-3xi-3yi^2=9-7i, \\ &(2x+3y)+(2y-3x)i=9-7i. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{cases} 2x+3y=9, \\ -3x+2y=-7. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $x = 3$, $y = 1$. Поэтому

$$\frac{9-7i}{2-3i} = 3 + i.$$

Упражнения

1989. Что выражает каждая из данных формул — определение или теорему:

а) $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$;

б) $\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$?

Вычислить (№ 1990—1992):

1990. $\frac{0+4i}{1+i}$. **1991.** $\frac{2+i}{2-i}$. **1992.** $\frac{5+0i}{-4+3i}$.

Доказать равенства:

1993. $\frac{6-i}{3+4i} = \frac{13+41i}{-25+25i}$. **1994.** $\frac{2+i}{3-i} = \frac{13+4i}{17-9i}$.

Поле комплексных чисел § 248

Комплексным числам мы посвятили уже несколько параграфов. Но наши рассуждения часто были нестрогими. Мы допустили (хотя и сознательно!) ряд логических погрешностей, которые теперь нужно устранить.

Чтобы разобраться в этом, поставим перед собой такой вопрос: *что значит ввести в рассмотрение новые числа*? Конечно, для новых чисел мы должны выбрать какие-то обозначения. Например, комплексные числа мы обозначаем $a + bi$. Но главное не в этом. Главное в том, чтобы определить, как сравниваются эти числа друг с другом, как производятся действия над ними (сложение, вычитание, умножение, деление). Пока эти действия не определены, употреблять такие выражения, как «сумма новых чисел» и «произведение новых чисел», мы не имеем права.

А как мы вводили комплексные числа? Прежде всего (см. § 243) мы потребовали, чтобы новое множество чисел содержало число, квадрат которого (то есть *произведение* с самим собой) равен — 1. Среди уже известных нам действительных чисел такого числа не существует. Если оно и существует, то только среди новых чисел. Но как же в таком случае мы могли говорить о произведении? Ведь умножение новых чисел еще не было определено! Таким образом, уже определение мнимой единицы было математически некорректным. Об умножении новых чисел мы говорили фактически и тогда, когда требовали, чтобы новое множество чисел вместе с действительным числом b и мнимой единицей i содержало их произведение bi. Далее, мы говорили о *сумме* $a + bi$, хотя сложение новых чисел так же, как и умножение, еще не было определено.

Вот почему наше изложение теории комплексных чисел нельзя признать математически строгим. Но как же в таком случае ввести в рассмотрение комплексные числа? Ответ на этот вопрос дается ниже.

Комплексными числами называются числа, записываемые в виде $a + bi$, *где* a *и* b *— произвольные действительные числа,* a i *— некоторый символ.*

Вводя обозначение $a + bi$, мы вовсе не связываем его с какой бы то ни было суммой. Знак «+» в выражении $a + bi$ п о к а не является признаком суммирования. Он входит просто как составная часть одного, не разделяемого на части выражения $a + bi$. Отметим также, что мы не требуем з а р а н е е, чтобы выполнялось соотношение $i^2 = -1$. Ведь пока что i — это просто символ, а не число.

По определению $a + bi = c + di$ *тогда и только тогда, когда*

$$a = c,\ b = d.$$

Сумма двух комплексных чисел определяется по формуле

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i, \tag{1}$$

а произведение — по формуле

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i. \tag{2}$$

Разность двух комплексных чисел $a + bi$ *и* $c + di$ *определяется как такое комплексное число, которое в сумме с* $c + di$ *дает* $a + bi$. Как было доказано в § 245, это число существует и равно

то есть $$(a - c) + (b - d)\,i.$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)\,i. \tag{3}$$

Частным от деления комплексного числа $a + bi$ *на комплексное число* $c + di$ *называется такое комплексное число, которое в результате умножения на* $c + di$ *дает* $a + bi$. В § 247 было доказано, что если $c + di \neq 0 + 0i$, то частное от деления $a + bi$ на $c + di$ существует и равно

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i. \tag{4}$$

Из приведенных выше четырех формул естественными на первый взгляд кажутся лишь формулы (1) и (3). Другие же две формулы трудно понять с первого взгляда. Вот почему мы начали с такого изложения теории комплексных чисел, которое хотя и является нестрогим, но зато дает возможность понять, как можно прийти к формулам (2) и (4).

Действия сложения, умножения, вычитания и деления над комплексными числами приводят опять же к комплексным числам. Посмотрим, выполняются ли при этом те законы сложения и умножения, которые были присущи действительным числам:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1,$$
$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3),$$
$$z_1 z_2 = z_2 z_1,$$
$$(z_1 z_2)\, z_3 = z_1 (z_2 z_3),$$
$$(z_1 + z_2)\, z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3.$$

Если мы покажем, что эти законы выполняются, то тем самым будет доказано, что множество всех комплексных чисел образует поле.

Начнем с первого закона. Пусть $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$. Тогда

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)\,i,$$
$$z_2 + z_1 = (c + di) + (a + bi) = (c + a) + (d + b)\,i.$$

Для действительных чисел коммутативный закон сложения, как мы знаем, выполняется. Следовательно, $a + c = c + a$; $b + d = d + b$. Поэтому комплексные числа $z_1 + z_2$ и $z_2 + z_1$ имеют одинаковые действительные части и коэффициенты при мнимых частях. Но в таком случае они равны: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

Теперь обратимся к пятому закону. Пусть $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, $z_3 = e + fi$. Тогда $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)\,i$.

Следовательно,

$$(z_1 + z_2)\, z_3 = [(a + c) + (b + d)i]\,(e + fi) =$$
$$= [(a + c)\, e - (b + d)\, f] + [(a + c)\, f + (b + d)\, e]\, i =$$
$$= [(ae - bf) + (ce - df)] + [(af + be) + (cf + de)]\, i.$$

С другой стороны,

$$z_1 z_3 = (a + bi)\,(e + fi) = (ae - bf) + (af + be)\, i,$$
$$z_2 z_3 = (c + di)\,(e + fi) = (ce - df) + (cf + de)\, i.$$

Поэтому

$$z_1 z_3 + z_2 z_3 = [(ae - bf) + (ce - df)] + [(af + be) + (cf + de)]\, i.$$

Сравнивая числа $(z_1 + z_2)\, z_3$ и $z_1 z_3 + z_2 z_3$, мы замечаем, что они имеют соответственно равные действительные части и коэффициенты при мнимых частях. Но в таком случае этим комплексные числа равны между собой:

$$(z_1 + z_2)\, z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3.$$

Мы доказали, что для комплексных чисел выполняются коммутативный закон сложения и дистрибутивный закон умножения относительно сложения. Предлагаем учащимся самостоятельно убедиться в том, что для комплексных чисел выполняются и все остальные законы сложения и умножения.

Итак, ***множество всех комплексных чисел образует поле.***

Упражнение

1995. Образует ли поле совокупность всех чисел вида:
а) $0 + bi$, где b — действительное число;
б) $a + ai$, где a — действительное число;
в) $a + bi$, где a и b — произвольные рациональные числа?

Геометрическое изображение комплексных чисел § 249

Как известно (см. ч. I, § 44), действительные числа можно изображать точками числовой прямой. При этом каждому действительному числу соответствует единственная точка числовой прямой. Например, действительному числу $\frac{5}{2}$ соответствует точка A (рис. 326), находящаяся справа от начальной точки 0 на расстоянии в $\frac{5}{2}$ единицы длины; действительному числу -2 соответствует точка B, находящаяся слева от точки O на расстоянии в 2 единицы длины; действительному числу $\sqrt{2}$

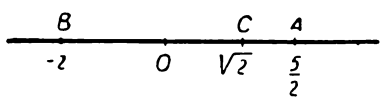

Рис. 326.

соответствует точка C, находящаяся справа от O на расстоянии в $\sqrt{2}$ единиц длины. Обратно, каждой точке числовой прямой соответствует вполне определенное действительное число. Например, точкам A и B (рис. 326) соответствуют рациональные числа $\frac{5}{2}$ и -2, а точке C — иррациональное число $\sqrt{2}$. Таким образом, ***множество всех действительных чисел находится во взаимно однозначном соответствии с множеством всех точек числовой прямой.***

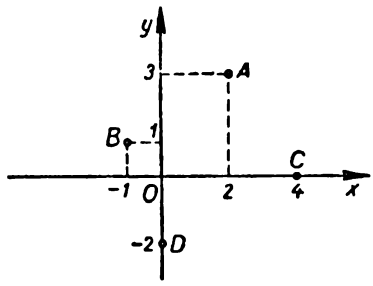

Рис. 327.

Подобно тому как действительные числа можно изображать точками числовой прямой, комплексные числа можно геометрически представлять точками плоскости.

Каждому комплексному числу $a + bi$ поставим в соответствие точку плоскости с координатами (a, b). Например, числу $2 + 3i$ поставим в соответствие (рис. 327) точку A с координатами (2, 3), числу $-1 + i$ — точку B с координатами $(-1, 1)$, числу $4 + 0i$ — точку C с координатами (4,0), числу $0 - 2i$ — точку D с координатами (0, —2) и т. д.

Каждая точка плоскости имеет определенные координаты. Поэтому при выбранном соответствии каждой точке плоскости будет отвечать некоторое комплексное число. Например, точке A с координатами (2, 3) отвечает число $2 + 3i$ (рис. 327), точке B с координатами $(-1, 1)$ — число $(-1 + i)$, точке C с координатами (4, 0) — число $4 + 0i$, а точке D с координатами (0, —2) — число $0 - 2i$. Но не может ли случиться так, что одной и той же точке плоскости, например точке (α, β), будут соответствовать различные комплексные числа, например, $a_1 + b_1 i$ и $a_2 + b_2 i$? Если бы было так, то мы имели бы:

$$\alpha = a_1, \ \beta = b_1;$$
$$\alpha = a_2, \ \beta = b_2.$$

Отсюда $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$. Но в таком случае числа $a_1 + b_1 i$ и $a_2 + b_2 i$ были бы равны между собой.

Итак, каждому комплексному числу $a + bi$ соответствует одна, вполне определенная точка плоскости, а именно точка с координатами (a, b). Наоборот, каждой точке плоскости (α, β) соответствует одно, вполне определенное комплексное число, а именно число $\alpha + \beta i$. Таким образом, ***множество всех комплексных чисел находится во взаимно однозначном соответствии с множеством всех точек плоскости.***

С каждой точкой плоскости A можно связать вектор $\overrightarrow{OA}$, выходящий из начала координат и оканчивающийся в точке A (рис. 328). Поэтому комплексные числа допускают и другую

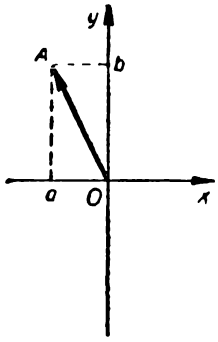

Рис. 328.

геометрическую интерпретацию. Каждое комплексное число $a + bi$ можно геометрически интерпретировать как вектор $\overrightarrow{OA}$ с координатами (a, b). Координаты вектора $\overrightarrow{OA}$ при этом будут такими же, как и координаты точки A, а именно (a, b). Очевидно, что такое соответствие между всеми комплексными числами и всеми векторами плоскости, выходящими из начала координат, является также взаимно однозначным.

Используя векторную интерпретацию комплексных чисел, легко истолковать то определение, которое мы приняли для суммы двух комплексных чисел:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)\,i.$$

Как известно, при сложении векторов их соответственные координаты складываются. Поэтому если вектор $\overrightarrow{OA}$ (рис. 329) имеет координаты (a, b), а вектор $\overrightarrow{OB}$ — координаты (c, d), то их сумма — вектор $\overrightarrow{OC}$ — будет иметь координаты $(a + c, b + d)$. Этот вектор как раз и соответствует комплексному числу $(a + c) + (b + d)\,i$, которое является суммой комплексных чисел $a + bi$ и $c + di$.

К сожалению, определение произведения двух комплексных чисел

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)\,i$$

не допускает такой простой интерпретации.

Упражнения

1996. Данные комплексные числа изобразить точками плоскости:

а) $1 + i$; в) $-2 + 3i$; д) $5 + 0i$; ж) $0 + 5i$;
б) $1 - i$; г) $-3 - 2i$; е) $-6 + 0i$; з) $0 - 4i$.

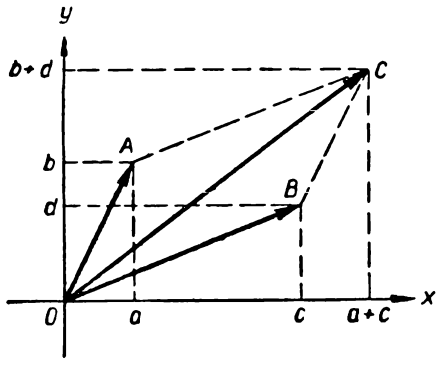

Рис. 329.

1997. Какие комплексные числа изображают на рисунке 330 точки A, B, C, D и O?

1998. Дать геометрическую интерпретацию формулам:

а) $(1 + 2i) + (1 - 2i) = 2 + 0i$;
б) $(3 - 4i) + (-1 + 2i) = 2 - 2i$.

1999. Пусть точка M служит изображением на плоскости комплексного числа $a + bi$. Построить на той же плоскости точки, которые изображали бы комплексные числа:

а) $a - bi$; д) $0 + bi$;
б) $-a + bi$; е) $-a + 0i$;
в) $-a - bi$; ж) $0 - bi$.
г) $a + 0i$;

2000. Пусть точка M служит изображением на плоскости комплексного числа $a - bi$. Где на той же плоскости расположены точки, изображающие числа:

а) $3a + 0i$; г) $0 + 2bi$;
б) $-5a + 0i$; д) $4a + 3bi$?
в) $0 - bi$;

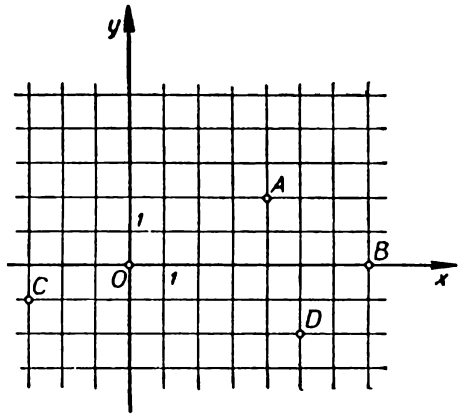

Рис. 330.

Действительные и чисто мнимые числа § 250

Рассмотрим отдельно все точки плоскости, лежащие на оси абсцисс. Они имеют координаты $(a, 0)$ и, следовательно, соответствуют комплексным числам вида $a + 0i$. Пусть $a_1 + 0i$ и $a_2 + 0i$ — два таких числа. Легко убедиться в справедливости следующих соотношений:

$$(a_1 + 0i) + (a_2 + 0i) = (a_1 + a_2) + 0i;$$
$$(a_1 + 0i) - (a_2 + 0i) = (a_1 - a_2) + 0i;$$
$$(a_1 + 0i)(a_2 + 0i) = a_1a_2 + 0i;$$
$$\frac{a_1 + 0i}{a_2 + 0i} = \frac{a_1}{a_2} + 0i \quad (a_2 \neq 0).$$

Эти соотношения показывают, что все комплексные числа вида $a + 0i$, то есть числа с нулевыми коэффициентами при мнимых частях, складываются, вычитаются, умножаются и делятся друг на друга как соответствующие им действительные числа. Геометрическое изображение этих чисел также совпадает с геометрическим изображением соответствующих действительных чисел: как те, так и другие представляются точками оси абсцисс. Это позволяет нам не делать различия между комплексным числом $a + 0i$ и действительным числом a. Поэтому в дальнейшем мы всюду вместо $a + 0i$ будем писать просто a; в частности, $0 + 0i = 0$. По этой причине ось абсцисс, на которой расположены точки, соответствующие действительным числам, или комплексным числам вида $a + 0i$, называется *действительной осью*.

Теперь нам ясно, каким образом действительные числа входят в совокупность всех комплексных чисел.

Точки оси ординат имеют координаты $(0, b)$ и потому соответствуют числам вида $0 + bi$, то есть комплексным числам,

действительные части которых равны нулю. Такие числа характеризуются тем, что квадраты их отрицательны (если только $b \neq 0$). Действительно,

$$(0 + bi)^2 = (0 + bi)(0 + bi) = 0 + 0 \cdot bi + b \cdot 0i - b^2 = \\ = -b^2 + 0i = -b^2.$$

В частности,

$$(0 + i)^2 = -1.$$

Когда комплексные числа еще не были введены в математику, трудно было представить себе, что квадраты чисел могут быть отрицательными. Поэтому комплексные числа вида $0 + bi$ получили название *чисто мнимых чисел*. В дальнейшем эти числа мы будем обозначать не $0 + bi$, а просто bi. Ось ординат, на которой располагаются все чисто мнимые числа, называется *мнимой осью*.

Условимся в дальнейшем комплексное число $0 + i$ обозначать просто i. После такого соглашения мы можем говорить не только о каком-то символе i, но и о комплексном числе i, подразумевая под ним число $0 + i$.
Как было показано выше, $(0 + i)^2 = -1$. Поэтому

$$i^2 = -1.$$

Число i получило название *мнимой единицы*. Рассмотрим произведение произвольного действительного числа b на мнимую единицу i:

$$b \cdot i = (b + 0i)(0 + i) = b \cdot 0 + bi + 0 \cdot 0i + 0 \cdot i^2 = 0 + bi.$$

Итак,

$$b \cdot i = 0 + bi.$$

Этим и оправдывается принятое выше соглашение обозначать числа вида $0 + bi$ просто bi.

В § 248 мы говорили, что по определению $a + bi$ есть просто особое обозначение, а не выражение суммы чисел a и bi. Ведь т о г д а мы еще не знали, что представляют собой комплексные числа a и bi; тем более мы не могли знать, как складываются эти числа. Теперь же мы знаем, что представляют собой комплексные числа a и bi и что представляет собой сумма двух комплексных чисел. Поэтому т е п е р ь законно поставить вопрос: а нельзя ли выражение $a + bi$ рассматривать как сумму двух чисел a и bi? Для решения этого вопроса заметим, что

$$a = a + 0i,$$
$$bi = 0 + bi.$$

Поэтому сумма чисел a и bi равна:

$$(a + 0i) + (0 + bi) = (a + 0) + (0 + b)i = a + bi.$$

Это дает положительный ответ на поставленный выше вопрос. Комплексное число $a + bi$ можно рассматривать как сумму двух комплексных чисел: действительного числа a и чисто мнимого числа bi.

Упражнения

2001. Что означает каждое из выражений:
а) комплексное число $a + bi$ равно нулю;
б) комплексное число $a + bi$ не равно нулю?

2002. Найти действительные числа x и y из уравнений:

а) $(x + y) + (x - y)i = 2 + 4i$;
б) $(x + y) + (x - y)i = 4i$;

в) $(x + y) + (x - y)\,i = 2$;
г) $(y + 2x) + (2y + 4x)\,i = 0$;
д) $(x + 1{,}5y) + (2x + 3y)\,i = 13i$.

2003. Найти чисто мнимые числа u и v из уравнений:
а) $u + iv = -3 + 2i$; б) $5u - 6iv = -24 - 5i$.

2004. Что можно сказать о двух комплексных числах, если их сумма и разность одновременно представляют собой:
а) действительные числа; б) чисто мнимые числа?

2005. Вычислить:
а) $[i\,(2 - i)]^2$; б) $[2i\,(3 - 4i)]^2$.

2006. Доказать, что квадрат комплексного числа $a + bi$ представляет собой действительное число тогда и только тогда, когда либо $a = 0$, либо $b = 0$.

Сопряженные числа. Практический способ деления комплексных чисел § 251

Комплексное число $a - bi$ называется *сопряженным* к комплексному числу $a + bi$. Например, число $2 - 3i$ является сопряженным к числу $2 + 3i$, число $5 + 4i$ — сопряженным к числу $5 - 4i$, число $-6i$ $(= 0 - 6i)$ — сопряженным к числу $6i$ $(= 0 + 6i)$ и т. д.

Пусть a — произвольное действительное число. Тогда

$$a = a + 0i = a - 0i.$$

Поэтому любое действительное число равно своему сопряженному. Верно и обратное утверждение: если комплексное число $a + bi$ равно своему сопряженному, то есть

$$a + bi = a - bi, \qquad (1)$$

то это число действительное. В самом деле, из (1) вытекает, что $b = -b$ или $b = 0$. Следовательно, $a + bi = a + 0 \cdot i = a$, что и требовалось доказать.

Таким образом, ***из всех комплексных чисел действительные числа (и только они) равны своим сопряженным числам.***

Число $a - bi$ является сопряженным к числу $a + bi$. Но число $a + bi$ будет, очевидно, сопряженным к числу $a - bi$. Таким образом, числа $a + bi$ и $a - bi$ являются сопряженными друг другу. Поэтому они называются *взаимно сопряженными комплексными числами*. Очевидно, что любые взаимно сопряженные комплексные числа $a + bi$ и $a - bi$ изображаются на плоскости точками, симметричными друг другу относительно действительной оси (см. рис. 331).

Произведение двух взаимно сопряженных комплексных чисел есть число действительное.

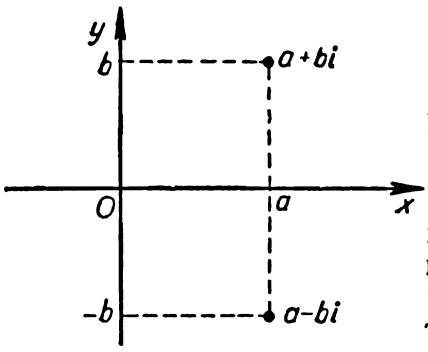

Рис. 331.

В самом деле,

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2i^2.$$

Но $i^2 = -1$. Поэтому

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

Доказанное свойство взаимно сопряженных чисел позволяет довольно просто производить деление комплексных чисел. Пусть нужно найти частное

$$\frac{a + bi}{c + di} \quad (c + di \neq 0).$$

Умножим числитель и знаменатель этой дроби на число $c - di$, сопряженное знаменателю. В результате мы получим дробь, знаменатель которой будет действительным числом:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac+bd)+(bc- ad)i}{c^2 + d^2}.$$

Теперь, используя дистрибутивный закон умножения относительно сложения, получим:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{1}{c^2 + d^2}[(ac + bd) + (bc - ad)i] = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

В § 247 эта формула была получена иным путем.

Примеры.

1) $\frac{7 - i}{3 + i} = \frac{(7 - i)(3 - i)}{(3 + i)(3 - i)} = \frac{21 - 7i - 3i - 1}{9 + 1} = \frac{20 - 10i}{10} = 2 - i;$

2) $\frac{1 + i}{1 - i} = \frac{(1 + i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{1 + 2i - 1}{1 + 1} = \frac{2i}{2} = i.$

Упражнения

2007. Назвать комплексные числа, сопряженные данным. Изобразить данные и сопряженные к ним числа точками плоскости:

а) $1 + i$; б) $2 - 3i$; в) 5; г) $4i$; д) 0; е) $2i - 1$.

Вычислить:

2008. $\frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} + i}$.

2009. $\frac{42 + 2i}{3 + 5i}$.

2010. $\frac{7 - 2i}{2 + 7i}$.

2011. $\frac{1}{i}$.

2012. $\frac{2 - 5i}{4 + i} - \frac{6 - 7i}{4 - i}$.

2013. $\frac{2 + i}{3 - 5i} + \frac{i}{i - 1}$.

2014. $\frac{a - bi}{b + ai} - i\frac{b - ai}{a + bi}$.

По определению первой степенью числа i является само число i, а второй степенью — число -1:

$$i^1 = i,\ i^2 = -1.$$

Более высокие степени числа i находятся следующим образом:

$$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i;$$
$$i^4 = i^3 \cdot i = -i^2 = 1;$$
$$i^5 = i^4 \cdot i = i;$$
$$i^6 = i^5 \cdot i = i^2 = -1$$

и т. д. Очевидно, что при любом натуральном n

$$i^{4n} = 1; \qquad i^{4n+1} = i;$$
$$i^{4n+2} = -1; \qquad i^{4n+3} = -i.$$

Например,

$$i^{125} - i^{26} = i^{124+1} - i^{24+2} = i - i^2 = i + 1,$$
$$i^{100} + i^{98} + i^{63} = i^{100} + i^{96+2} + i^{60+3} = 1 - 1 - i = -i.$$

Упражнения

Вычислить (№ 2015—2020):

2015. $i^6 + i^{16} + i^{26} + i^{36} + i^{46} + i^{56}$.

2016. $i^3 + i^{13} + i^{23} + i^{33} + i^{43} + i^{53}$.

2017. $i + i^2 + i^3 + i^4 + \ldots + i^n$ $(n > 4)$.

2018. $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4 \ldots i^{100}$.

2019. $\frac{1}{i^3}$.

2020. $\frac{1}{i^{11}} - \frac{1}{i^{41}} + \frac{1}{i^{75}} - \frac{1}{i^{1023}}$.

2021. При каком действительном значении a число $3i^3 - 2ai^2 + (1 - a)\,i + 5$ будет:

а) действительным; б) чисто мнимым; в) равным нулю?

Извлечение корней квадратных из отрицательных чисел. Решение квадратных уравнений с отрицательными дискриминантами § 253

Как мы знаем,

$$i^2 = -1.$$

Вместе с тем

$$(-i)^2 = (-1 \cdot i)^2 = (-1)^2 \cdot i^2 = -1.$$

Таким образом, существуют по крайней мере два значения корня квадратного из -1, а именно i и $-i$. Но, может быть, есть еще какие-нибудь комплексные числа, квадраты которых равны -1?

Чтобы выяснить этот вопрос, предположим, что квадрат комплексного числа $a + bi$ равен -1. Тогда

$$(a + bi)^2 = -1,$$
$$a^2 + 2abi - b^2 = -1.$$

Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительные части и коэффициенты при мнимых частях. Поэтому

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -1, \\ ab = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Согласно второму уравнению системы (1) хотя бы одно из чисел a и b должно равняться нулю. Если $b = 0$, то из первого уравнения получается $a^2 = -1$. Число a действительное, и поэтому $a^2 \geqslant 0$. Неотрицательное число a^2 не может равняться отрицательному числу -1. Поэтому равенство $b = 0$ в данном случае невозможно. Остается признать, что $a = 0$, но тогда из первого уравнения системы получаем: $-b^2 = -1$, $b = \pm 1$.

Следовательно, комплексными числами, квадраты которых равны -1, являются только числа i и $-i$. Условно это записывается в виде:

$$\sqrt{-1} = \pm i.$$

Аналогичными рассуждениями учащиеся могут убедиться в том, что существует ровно два числа, квадраты которых равны отрицательному числу $-a$. Такими числами являются $\sqrt{a}\,i$ и $-\sqrt{a}\,i$. Условно это записывается так:

$$\sqrt{-a} = \pm \sqrt{a}\,i.$$

Под $\sqrt{a}$ здесь подразумевается арифметический, то есть положительный, корень. Например, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$; поэтому

$$\sqrt{-4} = \pm 2i, \qquad \sqrt{-9} = \pm 3i \text{ и т. д.}$$

Если раньше при рассмотрении квадратных уравнений с отрицательными дискриминантами мы говорили, что такие уравнения не имеют корней, то теперь так говорить уже нельзя. Квадратные уравнения с отрицательными дискриминантами имеют комплексные корни. Эти корни получаются по известным нам формулам. Пусть, например, дано уравнение $x^2 + 2x + 5 = 0$; тогда

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - 5} = -1 \pm \sqrt{-4} = -1 \pm 2i.$$

Итак, данное уравнение имеет два корня: $x_1 = -1 + 2i$, $x_2 = -1 - 2i$. Эти корни являются взаимно сопряженными. Интересно отметить, что сумма их равна -2, а произведение 5, так что выполняется теорема Виета.

Упражнения

2022. (У с т н о.) Решить уравнения:
а) $x^2 = -16$; б) $x^2 = -2$; в) $3x^2 = -5$.

2023. Найти все комплексные числа, квадраты которых равны:
а) i; б) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

2024. Решить квадратные уравнения:
а) $x^2 - 2x + 2 = 0$; б) $4x^2 + 4x + 5 = 0$; в) $x^2 - 14x + 74 = 0$.
Решить системы уравнений (№ 2025, 2026):

2025. $\begin{cases} x + y = 6, \\ xy = 45. \end{cases}$ 2026. $\begin{cases} 2x - 3y = 1, \\ xy = 1. \end{cases}$

2027. Доказать, что корни квадратного уравнения с действительными коэффициентами и отрицательным дискриминантом являются взаимно сопряженными.

2028. Доказать, что теорема Виета верна для любых квадратных уравнений, а не только для уравнений с неотрицательным дискриминантом.

2029. Составить квадратное уравнение с действительными коэффициентами, корнями которого являются:
а) $x_1 = 5 - i$, $x_2 = 5 + i$; б) $x_1 = 3i$, $x_2 = -3i$.

2030. Составить квадратное уравнение с действительными коэффициентами, один из корней которого равен $(3 - i)(2i - 4)$.

2031. Составить квадратное уравнение с действительными коэффициентами, один из корней которого равен $\frac{32 - i}{1 - 3i}$.

Двучленные уравнения 3-й степени с действительными коэффициентами § 254

Так называются уравнения вида

$$ax^3 = b,$$

где a и b — произвольные действительные числа, отличные от нуля.

Решение таких уравнений мы рассмотрим на некоторых частных примерах.

П р и м е р 1. Решить уравнение $x^3 = 8$.

Перепишем данное уравнение в виде $x^3 - 8 = 0$. Используя формулу для разности кубов, получим: $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0$. Если $x - 2 = 0$, то $x = 2$; если же $x^2 + 2x + 4 = 0$, то $x = -1 \pm \sqrt{1 - 4} = -1 \pm \sqrt{-3} = -1 \pm \sqrt{3}\, i$.

Таким образом, данное уравнение имеет три корня:

$$x_1 = 2;\ x_2 = -1 - \sqrt{3}\, i;\ x_3 = -1 + \sqrt{3}\, i.$$

Действительным среди них является лишь один корень $x = 2$.

Пример 2. Решить уравнение $-\frac{1}{2}x^3 = 4$.

Умножив обе части этого уравнения на -2, мы придем к уравнению $x^3 = -8$. Это уравнение принципиально не отличается от ранее рассмотренного уравнения $x^3 = 8$. Поэтому мы приводим его решение без объяснений:

$$x^3 + 8 = 0,$$
$$(x + 2)(x^2 - 2x + 4) = 0,$$
$$x_1 = -2;\ x_2 = 1 - \sqrt{3}\,i;\ x_3 = 1 + \sqrt{3}\,i.$$

Пример 3. Решить уравнение $\frac{1}{3}x^3 = -2$.

Умножив обе части этого уравнения на 3, получим $x^3 = -6$, откуда $x^3 + 6 = 0$. Рассматривая число 6 как куб числа $\sqrt[3]{6}$, разложим $x^3 + 6$ на множители:

$$(x^3 + 6) = (x + \sqrt[3]{6})\left[x^2 - \sqrt[3]{6}\,x + (\sqrt[3]{6})^2\right].$$

Следовательно, либо $x + \sqrt[3]{6} = 0$, либо $x^2 - \sqrt[3]{6}\,x + (\sqrt[3]{6})^2 = 0$.

Первое из этих уравнений имеет корень $x_1 = -\sqrt[3]{6}$. Второе уравнение дает:

$$x_{2,3} = \frac{\sqrt[3]{6} \pm \sqrt{(\sqrt[3]{6})^2 - 4(\sqrt[3]{6})^2}}{2} = \frac{\sqrt[3]{6} \pm \sqrt[3]{6}\cdot\sqrt{3}\,i}{2} =$$
$$= \frac{\sqrt[3]{6}}{2}(1 \pm \sqrt{3}\,i)$$

Итак, данное уравнение имеет три корня:

$$x_1 = -\sqrt[3]{6};$$
$$x_2 = \frac{\sqrt[3]{6}}{2}(1 + \sqrt{3}\,i)$$
$$x_3 = \frac{\sqrt[3]{6}}{2}(1 - \sqrt{3}\,i).$$

Из этих трех корней лишь один представляет собой действительное число.

Упражнения

Решить уравнения (№ 2032—2037):

2032. $3x^3 = 81$. **2034.** $x^3 = 3$. **2036.** $3x^3 = 2$.

2033. $x^3 = -27$. **2035.** $x^3 = -5$. **2037.** $-4x^3 = \frac{1}{2}$.

2038. Доказать, что сумма всех корней уравнения $x^3 = -4$ равна 0.

2039. Найти произведение всех корней уравнения $x^3 = 6$.

Так называются уравнения вида

$$ax^4 = b,$$

где a и b — произвольные действительные числа, отличные от нуля.

Решение таких уравнений мы тоже рассмотрим на некоторых частных примерах.

Пример 1. Решить уравнение $x^4 = 16$.

Перепишем данное уравнение в виде:

$$x^4 - 16 = 0.$$

Левую часть этого уравнения разложим на множители:

$$x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x + 2)(x - 2)(x^2 + 4).$$

Отсюда следует, что корнями уравнения $x^4 = 16$ будут:

$$x_1 = -2,\ x_2 = 2,\ x_3 = 2i,\ x_4 = -2i.$$

Действительными среди этих корней являются лишь два корня:

$$x_1 = -2 \text{ и } x_2 = 2.$$

Пример 2. Решить уравнение $x^4 = -16$.

В множестве действительных чисел это уравнение не имеет корней, так как четная степень любого действительного числа неотрицательна. В множестве комплексных чисел это уравнение, как мы сейчас покажем, имеет 4 различных корня.

Перепишем данное уравнение в виде:

$$x^4 + 16 = 0.$$

Выражение $x^4 + 16$ можно рассматривать как сумму квадратов чисел x^2 и 4. Дополнив эту сумму до точного квадрата, получим:

$$x^4 + 16 = x^4 + 16 + 2 \cdot 4 \cdot x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x^2 = (x^2 + 4)^2 - 8x^2.$$

Теперь используем формулу для разности квадратов двух чисел:

$$(x^2 + 4)^2 - 8x^2 = (x^2 + 4 + \sqrt{8x^2})(x^2 + 4 - \sqrt{8x^2}) =$$
$$= (x^2 + 2\sqrt{2}\,x + 4)(x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 4).$$

Итак,

$$x^2 + 16 = (x^2 + 2\sqrt{2}\,x + 4)(x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 4).$$

Поэтому уравнение $x^4 = -16$ можно представить в виде:

$$(x^2 + 2\sqrt{2}\,x + 4)(x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 4) = 0.$$

Если $x^2 + 2\sqrt{2}\,x + 4 = 0$, то $x_{1,2} = -\sqrt{2} \pm \sqrt{2 - 4}$, или

$$x_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i,$$
$$x_2 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i;$$

если же $x^2 - 2\sqrt{2}x + 4 = 0$, то $x_{3,4} = \sqrt{2} \pm \sqrt{2-4}$, или

$$x_3 = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,i,$$
$$x_4 = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i.$$

Мы получили четыре корня уравнения $x^4 = -16$. Среди них нет ни одного действительного корня.

Пример 3. Решить уравнение $3x^4 = -6$. Принципиально это уравнение не отличается от предыдущего. Поэтому мы приводим его решение без объяснений:

$$x^4 = -2.$$

$$x^4 + 2 = x^4 + (\sqrt{2})^2 = x^4 + (\sqrt{2})^2 + 2x^2\sqrt{2} - 2x^2\sqrt{2} =$$
$$= (x^2 + \sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2}x^2 =$$
$$= (x^2 + \sqrt{2})^2 - (\sqrt[4]{8}\,x)^2 = (x^2 + \sqrt[4]{8}\,x + \sqrt{2})\,(x^2 - \sqrt[4]{8}\,x + \sqrt{2}).$$

Если $x^2 + \sqrt[4]{8}\,x + \sqrt{2} = 0$, то

$$x_{1,2} = \frac{-\sqrt[4]{8} \pm \sqrt{(\sqrt[4]{8})^2 - 4\sqrt{2}}}{2} = \frac{-\sqrt[4]{8} \pm \sqrt{-2\sqrt{2}}}{2} = \frac{-\sqrt[4]{8} \pm \sqrt[4]{8}\,i}{2}.$$

Если же $x^2 - \sqrt[4]{8}x + \sqrt{2} = 0$, то аналогично получим:

$$x_{3,4} = \frac{\sqrt[4]{8} \pm \sqrt[4]{8}\,i}{2}.$$

Таким образом, данное уравнение имеет четыре различных корня. Среди них нет ни одного действительного корня.

Упражнения

Решить уравнения (№ 2040—2044):

2040. $x^4 = 81$. **2042.** $x^4 = 2$. **2044.** $3x^4 = 5$.

2041. $x^4 = -81$. **2043.** $x^4 = -3$.

2045. Найти сумму всех корней уравнения $x^4 = 4$.

2046. Найти произведение всех корней уравнения $x^4 = -7$.

Тригонометрическая форма комплексных чисел § 256

Пусть комплексному числу $a + bi$ соответствует вектор $\overrightarrow{OA}$ с координатами (a, b) (см. рис. 332). Обозначим длину этого вектора через r, а угол, который он образует с осью x, через φ. По определению синуса и косинуса:

$$\frac{a}{r} = \cos\varphi, \quad \frac{b}{r} = \sin\varphi.$$

Поэтому $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$. Но в таком случае комплексное число $a + bi$ можно записать в виде:

$$a + bi = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Как известно, квадрат длины любого вектора равен сумме квадратов его координат. Поэтому $r^2 = a^2 + b^2$, откуда $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

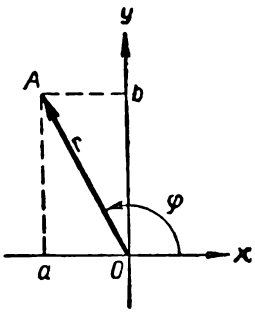

Рис. 332.

Итак, ***любое комплексное число $a + bi$ можно представить в виде:***

$$a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad (1)$$

где $r = \sqrt{a^2+b^2}$, а угол φ определяется из условия:

$$\begin{cases} \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{cases} \qquad (2)$$

Такая форма записи комплексных чисел называется *тригонометрической*.

Число r в формуле (1) называется *модулем*, а угол φ — *аргументом* комплексного числа $a + bi$.

Если комплексное число $a + bi$ не равно нулю, то модуль его положителен; если же $a + bi = 0$, то $a = b = 0$ и тогда $r = 0$.

Модуль любого комплексного числа определен о д н о з н а ч н о.

Если комплексное число $a + bi$ не равно нулю, то аргумент его определяется формулами (2) однозначно с точностью до угла, кратного 2π. Если же $a + bi = 0$, то $a = b = 0$. В этом случае $r = 0$. Из формулы (1) легко понять, что в качестве аргумента φ в данном случае можно выбрать любой угол: ведь при любом φ

$$0 \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi) = 0.$$

Поэтому аргумент нуля не о п р е д е л е н.

Модуль комплексного числа z иногда обозначают $|z|$, а аргумент $\arg z$. Рассмотрим несколько примеров на представление комплексных чисел в тригонометрической форме.

П р и м е р 1. Записать в тригонометрической форме комплексное число $1 + i$.

Найдем модуль r и аргумент φ этого числа.

$$r = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{2}.$$

Следовательно, $\sin\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, откуда $\varphi = \dfrac{\pi}{4} + 2n\pi$.

Таким образом,

$$1 + i = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right)\right],$$

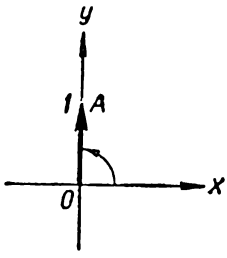

Рис. 333.

где n — любое целое число. Обычно из бесконечного множества значений аргумента комплексного числа выбирают то, которое заключено между 0 и 2π. В данном случае таким значением является $\frac{\pi}{4}$. Поэтому

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Пример 2. Записать в тригонометрической форме комплексное число $\sqrt{3} - i$.

Имеем:

$$r = \sqrt{3+1} = 2; \quad \cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\varphi = -\frac{1}{2}.$$

Поэтому, с точностью до угла, кратного 2π, $\varphi = \frac{11}{6}\pi$; следовательно,

$$\sqrt{3} - i = 2\left(\cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\pi\right).$$

Пример 3. Записать в тригонометрической форме комплексное число i.

Комплексному числу i соответствует вектор $\overrightarrow{OA}$, оканчивающийся в точке A оси y с ординатой 1 (рис. 333). Длина такого вектора равна 1, а угол, который он образует с осью абсцисс, равен $\frac{\pi}{2}$. Поэтому

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}.$$

Пример 4. Записать в тригонометрической форме комплексное число 3.

Комплексному числу 3 соответствует вектор $\overrightarrow{OA}$, оканчивающийся в точке оси x абсциссой 3 (рис. 334). Длина такого вектора равна 3, а угол, который он образует с осью абсцисс, равен 0. Поэтому

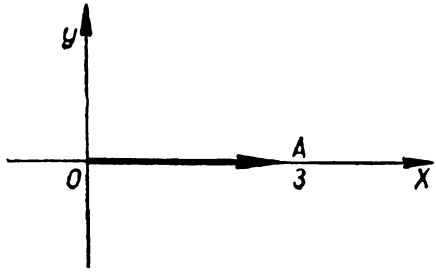

Рис. 334.

$$3 = 3(\cos 0 + i\sin 0).$$

Пример 5. Записать в тригонометрической форме комплексное число —5.

Комплексному числу —5 соответствует вектор $\overrightarrow{OA}$, оканчивающийся в точке оси x с абсцис-

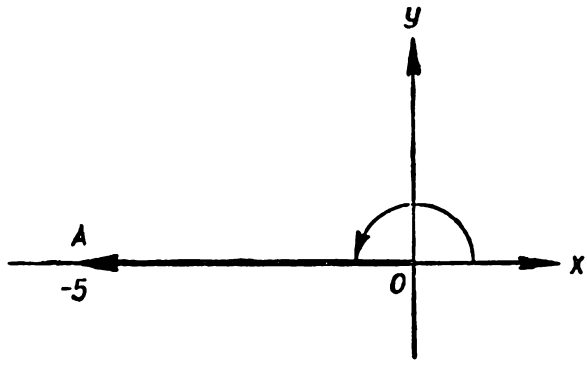

Рис. 335.

сой —5 (рис. 335). Длина такого вектора равна 5, а угол, который он образует с осью абсцисс, равен π. Поэтому

$$-5 = 5(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Упражнения

2047. Данные комплексные числа записать в тригонометрической форме, определив их модули и аргументы:

1) $2 + 2\sqrt{3}\,i$; 4) $12i - 5$; 7) $3i$;
2) $\sqrt{3} + i$; 5) 25; 8) $-2i$;
3) $6 - 6i$; 6) -4; 9) $3i - 4$.

2048. Указать на плоскости множества точек, изображающих комплексные числа, модули r и аргументы φ которых удовлетворяют условиям:

1) $r = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$; 4) $r < 3$; 7) $0 < \varphi < \frac{\pi}{6}$;
2) $r = 2$; 5) $2 < r < 3$; 8) $0 < \varphi < \pi$;
3) $r \leqslant 3$; 6) $\varphi = \frac{\pi}{3}$; 9) $1 < r < 2$,
10) $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$.

2049. Могут ли модулем комплексного числа одновременно быть числа r и $-r$?

2050. Могут ли аргументом комплексного числа одновременно быть углы φ и $-\varphi$?

Данные комплексные числа представить в тригонометрической форме, определив их модули и аргументы:

2051*. $1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$.
2052*. $\sin\varphi + i\cos\varphi$.
2053*. $-5(\cos 40^\circ - i\sin 40^\circ)$.
2054*. $2(\cos 20^\circ - i\sin 20^\circ)$.
2055*. $3(-\cos 15^\circ - i\sin 15^\circ)$.

Умножение и деление комплексных чисел удобнее выполнять, если эти числа заданы в тригонометрической форме. Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. ***Модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению их модулей, а аргумент — сумме их аргументов.***

Доказательство. Пусть

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Тогда

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 \cdot r_2(\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 \cdot r_2[(\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2)];$$

но

$$\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 = \cos(\varphi_1 + \varphi_2);$$
$$\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 = \sin(\varphi_1 + \varphi_2).$$

Поэтому

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

А это и означает, что модуль произведения $z_1 \cdot z_2$ равен произведению модулей чисел z_1 и z_2, а аргумент произведения — сумме аргументов чисел z_1 и z_2. Теорема 1 доказана.

Примеры.

$2(\cos 130° + i\sin 130°) \cdot 3(\cos 230° + i\sin 230°) = 6(\cos 360° + i\sin 360°) = 6;$

$5(\cos 47° + i\sin 47°) \cdot 4(\cos 13° + i\sin 13°) = 20(\cos 60° + i\sin 60°) =$

$$= 20\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 10 + 10\sqrt{3}\,i.$$

Отметим, что доказанная теорема справедлива для любого числа сомножителей, то есть при любом n:

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \ldots r_n(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n) =$$
$$= r_1 r_2 \ldots r_n[\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n)].$$

В частном случае, когда все сомножители равны между собой, получаем:

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n[\cos n\varphi + i\sin n\varphi].$$

Эта формула носит название формулы Муавра*. При $r = 1$ она принимает вид:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Теорема 2. ***Модуль частного двух комплексных чисел равен частному модулей делимого и делителя; аргумент частного двух не равных нулю комплексных чисел равен разности аргументов делимого и делителя.***

Доказательство. Обозначим частное от деления комплексного числа $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ на комплексное число $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \neq 0$ через $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда $z = \frac{z_1}{z_2}$, или $z \cdot z_2 = z_1$. Поэтому

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1).$$

Производя умножение в левой части этого равенства, получаем:

$$rr_2[\cos(\varphi + \varphi_2) + i\sin(\varphi + \varphi_2)] = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1).$$

Модули двух равных комплексных чисел, отличных от нуля, равны, а аргументы могут отличаться лишь на угол, кратный 2π. Поэтому из последнего

* Муавр (1667—1754) — английский математик.

равенства вытекает, что

$$rr_2 = r_1, \quad \varphi + \varphi_2 - \varphi_1 = 2n\pi,$$

где n — некоторое целое число Следовательно,

$$r = \frac{r_1}{r_2}, \quad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2 + 2n\pi.$$

Аргумент любого комплексного числа, отличного от нуля, определен лишь с точностью до угла, кратного 2π. Поэтому можно считать, что аргумент φ комплексного числа z равен

$$\varphi_1 - \varphi_2.$$

Теорема доказана

Примеры.

1) $\dfrac{2(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)}{3(\cos 105^\circ + i \sin 105^\circ)} = \dfrac{2}{3}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{3}(1 + i)$;

2) $\dfrac{\cos 70^\circ + i \sin 70^\circ}{\cos 100^\circ + i \sin 100^\circ} = \cos(-30^\circ) + i \sin(-30^\circ) = \cos 30^\circ - i \sin 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$.

Упражнения

2056. Выполнить указанные действия:

а) $5(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ) \cdot 3(\cos 50^\circ + i \sin 50^\circ)$;

б) $2(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ) \cdot 7(\cos 100^\circ + i \sin 100^\circ)$;

в) $4\left(\cos\dfrac{\pi}{8} + i \sin\dfrac{\pi}{8}\right) \cdot 6\left(\cos\dfrac{7}{8}\pi + i \sin\dfrac{7}{8}\pi\right)$;

г) $7\left(\cos\dfrac{8}{15}\pi + i \sin\dfrac{8}{15}\pi\right) \cdot 3\left(\cos\dfrac{2}{3}\pi + i \sin\dfrac{2}{3}\pi\right) \cdot 2\left(\cos\dfrac{4}{5}\pi + i \sin\dfrac{4}{5}\pi\right)$.

2057. Вычислить:

а) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)^{100}$; б) $(\sqrt{3} + i)^{50}$; в) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + i\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^8$.

2058. Как изменяется модуль и аргумент комплексного числа в результате умножения этого числа на:

а) i; в) $2i$; д) 4;

б) $-i$; г) $-3i$; е) -5?

2059. Выполнить деление:

а) $\dfrac{\cos 130^\circ + i \sin 130^\circ}{\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ}$;

б)* $\dfrac{\cos 130^\circ - i \sin 130^\circ}{\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ}$;

в)* $\dfrac{-\cos 100^\circ + i \sin 100^\circ}{\cos 40^\circ - i \sin 40^\circ}$;

г) $\dfrac{2(\cos 107^\circ + i \sin 107^\circ)}{5(\cos 47^\circ + i \sin 47^\circ)}$.

2060. Как изменятся модуль и аргумент комплексного числа в результате деления этого числа на: а) i; б) $-i$?

Извлечение корней из комплексного числа § 258

Предположим, что корень степени n из комплексного числа $r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, отличного от нуля, существует и равен

$$\rho(\cos\theta + i \cos\theta)^*.$$

* ρ и θ — греческие буквы, читаются соответственно: ро и тэта.

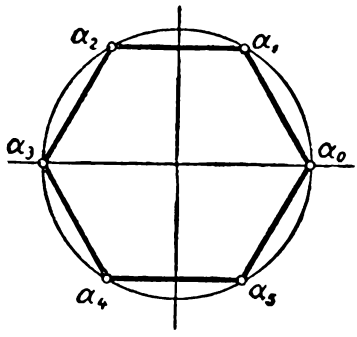

Рис. 336.

Тогда

$$[\rho(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Используя формулу Муавра, получаем:

$$\rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Модули двух равных комплексных чисел, отличных от нуля, равны, а аргументы могут отличаться лишь на угол, кратный 2π. Поэтому

$$\rho^n = r,\quad n\theta = \varphi + 2k\pi,$$

откуда

$$\rho = \sqrt[n]{r},\quad \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},$$

где k может быть любым целым числом. В частности,

при $k = 0$ $\quad \theta = \dfrac{\varphi}{n}$;

при $k = 1$ $\quad \theta = \dfrac{\varphi}{n} + \dfrac{2\pi}{n}$;

при $k = 2$ $\quad \theta = \dfrac{\varphi}{n} + \dfrac{4\pi}{n}$;

. . . . . .

при $k = n-1$ $\quad \theta = \dfrac{\varphi}{n} + \dfrac{2(n-1)\pi}{n}$.

При $k = n$, $n+1$, $n+2$ и т. д будут получаться значения θ, отличающиеся от написанных выше на углы, кратные 2π. Поэтому никаких новых комплексных чисел эти значения k дать не могут.

Легко показать, что никаких новых комплексных чисел мы не получим и при отрицательных значениях k.

Итак, если только корень степени n из комплексного числа $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ существует, то он может принимать лишь следующие n значений:

$$\alpha_0 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right);$$

$$\alpha_1 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi}{n}\right);$$

. . . . . .

$$\alpha_{n-1} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n}\right).$$

Непосредственной проверкой легко установить, используя формулу Муавра, что каждое из этих чисел удовлетворяет соотношению

$$\alpha^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

и потому является корнем n-й степени из комплексного числа

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Таким образом, ***каждое комплексное число, отличное от нуля, имеет ровно n корней n-й степени.***

Геометрически все n значений корня n-й степени из комплексного числа $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ изображаются точками, лежащими на окружности с центром в начале координат, радиус которой равен $\sqrt[n]{r}$ (см., например, рис. 336, на

котором $r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 1$, $n = 6$). Если эти точки соединить последовательно прямолинейными отрезками, то в результате получится правильный n-угольник.

Пример. Найти все значения корня 4-й степени из числа i.

Представив i в виде $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$, найдем, что модули всех корней равны $\sqrt[4]{1} = 1$, а аргументы $\frac{\pi}{8}$; $\frac{\pi}{8} + \frac{2\pi}{4}$; $\frac{\pi}{8} + \frac{4\pi}{4}$; $\frac{\pi}{8} + \frac{6\pi}{4}$, или $\frac{\pi}{8}$; $\frac{5}{8}\pi$; $\frac{9}{8}\pi$; $\frac{13}{8}\pi$. Поэтому корнями 4-й степени из числа i являются числа:

$$\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8};$$
$$\cos\frac{5}{8}\pi + i\sin\frac{5}{8}\pi;$$
$$\cos\frac{9}{8}\pi + i\sin\frac{9}{8}\pi;$$
$$\cos\frac{13}{8}\pi + i\sin\frac{13}{8}\pi.$$

При желании, используя тригонометрические таблицы, эти корни можно записать в более явном виде.

Упражнения

2061. Найти все значения данных корней:

а) $\sqrt[3]{3}$; в) $\sqrt[4]{1}$; д) $\sqrt{\cos 100° + i\sin 100°}$.

б) $\sqrt[3]{1+i}$; г) $\sqrt[4]{-1}$;

2062. Решить уравнения:

а) $x^5 = a$ (a — действительное число); б) $x^5 = i$.

2063. Решить уравнение:

$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

2064. Доказать, что все корни n-й степени из комплексного числа z можно расположить так, что в результате получится геометрическая прогрессия. Найти знаменатель этой прогрессии.

Алгебраическое уравнение n-й степени — § 259

Наиболее полно элементарная математика рассматривает алгебраические уравнения только двух степеней: первой и второй. Эти уравнения имеют вид:

$$ax + b = 0 \qquad (a \neq 0),$$
$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0).$$

В области комплексных чисел любое алгебраическое уравнение 1-й степени имеет ровно один корень, а любое алгебраическое уравнение 2-й степени — ровно два корня. В высшей алгебре изучаются уравнения произвольных степеней.

Алгебраическое уравнение n-й степени имеет следующий вид:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \qquad (1)$$

где x — неизвестная величина, а $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — заданные комплексные числа, причем $a_0 \neq 0$. Вопрос о существовании и количестве корней такого уравнения долгое время являлся центральным вопросом алгебры. В 1799 г. выдающийся немецкий математик Гаусс (1777 — 1855) доказал следующую теорему: ***любое алгебраическое уравнение n-й степени имеет хотя бы один комплексный корень.***

Это утверждение вошло в математику под названием основной теоремы алгебры*. После доказательства Гаусса было предложено очень много других способов доказательства этой теоремы. Да и сам Гаусс предложил еще три доказательства. Все существующие до настоящего времени доказательства этой теоремы довольно сложны и потому не могут быть рассмотрены в нашем учебнике.

Рассмотрим уравнение

$$(x - 1)^3 (x - 2) = 0.$$

Нетрудно понять, что оно имеет ровно два корня: 1 и 2. Однако корни эти находятся в неравноправном положении. Множитель $x - 2$, соответствующий корню 2, входит в левую часть уравнения в первой степени, а множитель $x - 1$, соответствующий корню 1, — в третьей степени. Про корень 2 говорят, что он является *простым* корнем рассматриваемого уравнения, а про корень 1 — что он является *кратным* корнем, точнее, *корнем кратности* 3.

Основная теорема алгебры гарантирует существование хотя бы одного комплексного корня алгебраического уравнения. Однако, исходя из нее можно доказать, что ***любое алгебраическое уравнение n-й степени имеет ровно n комплексных корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.*** При этом если корни уравнения (1) равны $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то левая часть этого уравнения представляется в виде:

$$a_0 (x - x_1) (x - x_2) \ldots (x - x_n).$$

(Сравните с квадратным уравнением!)

Для уравнений 1-й и 2-й степени выведены общие формулы, по которым можно находить корни этих уравнений. Так, например, для уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ такой формулой является формула

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

* По мере развития алгебры изменялось и ее содержание. Современная алгебра включает в себя настолько обширный материал, что сейчас указанную теорему часто уже не считают основной теоремой всей алгебры.

Аналогичные формулы получены и для уравнений 3-й и 4-й степени. Однако эти формулы слишком громоздки и потому здесь не приводятся. Что же касается произвольных алгебраических уравнений более высоких степеней, то для них, как показал норвежский математик Абель (1802—1829), таких формул составить, вообще говоря, нельзя. Исчерпывающее решение вопроса об условиях, при которых уравнение может быть решено в радикалах, дал выдающийся французский математик Эварист Галуа (1811—1832).

Итак, точно решить алгебраическое уравнение степени выше четвертой удается не всегда. Однако современная математика располагает весьма эффективными методами приближенного решения таких уравнений. Эти методы излагаются в книгах по вычислительной математике.

Исторические замечания § 260

Первое упоминание о «мнимых» числах как о квадратных корнях из отрицательных чисел относится еще к XVI веку. В 1545 г. итальянский ученый Кардано (1501—1576) опубликовал работу, в которой, пытаясь решить уравнение $x^3 - 12x + 16 = 0$, он пришел к выражению $\sqrt{-243}$. Через это выражение представлялись действительные корни уравнения $x_1 = x_2 = 2$; $x_3 = -4$. Таким образом, в работе Кардано мнимые числа появились как промежуточные члены в вычислениях.

В 1629 г. голландский ученый Жирар (1595—1632) впервые высказал утверждение, что всякое алгебраическое уравнение n-й степени имеет ровно n корней. Строго доказать это ему не удалось. Как мы знаем, это сделал Гаусс лишь в 1799 г. Однако важно то, что, высказав правильную гипотезу, Жирар подчеркнул, что, помимо действительных корней, при этом нужно учитывать и комплексные корни.

До середины XVIII века комплексные числа появляются лишь эпизодически в трудах некоторых математиков. С середины XVIII века Даламбер, Эйлер и Лагранж с успехом используют функции комплексного аргумента для решения некоторых задач гидродинамики. С помощью функций комплексного переменного решаются задачи о составлении географических карт, а также ряд чисто математических задач. К концу XVIII века были изучены все основные свойства комплексных чисел. Эти числа становятся одним из сильнейших инструментов математики.

Однако математики XVIII века не понимали до конца природы комплексных чисел. Они считали эти числа воображаемыми, лишенными всякого объективного содержания.

Лишь в конце XVIII века, когда в математику прочно вошли векторы, комплексным числам стало возможно дать простую геометрическую интерпретацию и объяснить правила действий над ними. Впервые это сделал датчанин Вессель (1745—1818). Интересно отметить, что Вессель не был специалистом-математиком. Его исследования о геометрическом истолковании комплексных чисел долгое время оставались неизвестными и обратили на себя внимание лишь во второй половине XIX века.

Полное признание математиками комплексных чисел началось лишь после выхода в свет работ Гаусса.

Одним из самых замечательных достижений математики XVIII и XIX веков явилось создание теории функций комплексного переменного. Эта теория играет сейчас одну из основных ролей в прикладной математике.

Задачи на повторение

2065. Может ли сумма квадратов двух чисел быть отрицательной? Ответ пояснить примерами.

2066. При каком условии квадрат комплексного числа $a + bi$ является чисто мнимым числом?

2067. В каком случае сумма и произведение двух комплексных чисел являются действительными числами?

Упростить выражения (2068—2073):

2068. $(1 + i)^2 + (1 - i)^2$.

2069. $(1 + i)^3 + (1 - i)^3$.

2070. $(1 + i)^4 + (1 - i)^4$.

2071. $\dfrac{1+i}{1-i} + \dfrac{1-i}{1+i}$.

2072. $\dfrac{(1+i)^8}{(1-i)^4} + \dfrac{3+2i}{i(6-8i)} \cdot (1 + i)^2$.

2073. $\dfrac{(1+i)^8}{0{,}4\,(1-i)^8} \cdot \left(\dfrac{2-i}{4+3i} - \dfrac{1-2i}{3+4i}\right)$.

Доказать тождества (№ 2074, 2075):

2074. $(1 + i)^{20} = -2^{10}$.

2075. $(1 - i)^{30} = 2^{15}i$.

2076. Составить квадратное уравнение с действительными коэффициентами, один из корней которого равен:

а) $(5 + i)(i - 3)$; б) $\dfrac{5+i}{i-3}$.

2077. Может ли квадратное уравнение с действительными коэффициентами иметь корни $1 + i$ и $1 + 2i$?

2078. Найти действительные числа x и y из уравнений:

а) $\dfrac{3x - iy}{2y - 5ix} = \dfrac{7 + 5i}{12 - 8i}$; б) $\dfrac{y - ix}{x + iy} = \dfrac{4 + i}{4i - 1}$.

2079. Найти чисто мнимые числа u и v из уравнений:

а) $5v - 7ui = -7 + 5i$; б) $2u + 3vi = 12 + 6i$.

2080. Доказать, что для любых комплексных чисел z_1 и z_2

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2.$$

Какую известную из геометрии теорему о диагоналях параллелограмма выражает это соотношение?

2081. Найти модуль и аргумент комплексного числа $(5 - 12i)(3 - 4i)$.

2082. Выразить модуль и аргумент комплексного числа через модуль и аргумент сопряженного к нему числа.

2083. Представить в тригонометрической форме комплексные числа:

а) $1 + i \operatorname{tg} \alpha$; б) $\dfrac{1 - i \operatorname{tg} \alpha}{1 + i \operatorname{tg} \alpha}$.

2084. Точка плоскости A изображает комплексное число $a + bi$. Какое число изображает точка B, симметричная точке A относительно:

а) действительной оси;

б) мнимой оси;

в) начала координат?

2085*. На плоскости известно положение точки, соответствующей комплексному числу z. Как с помощью циркуля и линейки отыскать на той же плоскости точку, соответствующую комплексному числу $\frac{1}{z}$?

2086. Доказать, что все корни n-й степени из комплексного числа $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ геометрически изображаются как вершины правильного n-угольника. Найти сторону этого n-угольника.

2087. Доказать, что сумма всех корней n-й степени из любого комплексного числа равна нулю.

2088. Вычислить:

$$(\sqrt{3} + i)^{10} + (\sqrt{3} - i)^{10}.$$

2089. x_1, x_2 и x_3 — корни уравнения $x^3 - 1 = 0$. Чему равно выражение

$$\frac{1}{x_1^n x_2^n} + \frac{1}{x_2^n x_3^n} + \frac{1}{x_3^n x_1^n}?$$

МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

XII

Общие и частные утверждения. Дедукция и индукция § 261

Все утверждения можно разделить на о б щ и е и ч а с т н ы е. Примерами общих утверждений являются утверждения:

1) в любом треугольнике сумма двух сторон больше третьей стороны;

2) все числа, оканчивающиеся четной цифрой, делятся на 2 и т. д.

Частными являются, например, утверждения:

1) в треугольнике ABC (рис. 337) сумма двух сторон AB и BC больше третьей стороны AC.

2) число 136 делится на 2.

Переход от общих утверждений к частным называется *дедукцией*. Дедукция очень часто используется в математике. Все общие теоремы мы доказываем именно для того, чтобы затем использовать их для решения различных частных задач.

Но наряду с этим в математике часто приходится от частных утверждений переходить к общим. Например, рассматривая арифметическую прогрессию

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

(см. ч. I, § 142), мы заметили, что

$$a_2 = a_1 + d,$$
$$a_3 = a_1 + 2d,$$
$$a_4 = a_1 + 3d.$$

Исходя из этих частных формул, мы сделали вывод, что при любом натуральном n

$$a_n = a_1 + (n - 1)\, d.$$

Переход от частных утверждений к общим называется *индукцией*.

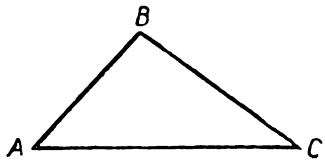

Рис. 337.

В отличие от дедукции индукция может привести как к верным, так и к неверным результатам. Например, рассматривая значения квадратного трехчлена $f(n) = n^2 + n + 41$ при малых натуральных значениях n, можно заметить, что эти значения вы-

ражаются простыми числами (то есть числами, которые без остатка делятся только на себя и на 1).

Действительно,

$$f(1) = 43;$$
$$f(2) = 47;$$
$$f(3) = 53;$$
$$f(4) = 61$$

и т. д. Напрашивается вывод, что при любом натуральном n значение выражения $n^2 + n + 41$ является простым числом. Однако вывод этот является неверным. Например, при $n = 41$

$$n^2 + n + 41 = 41^2 + 41 + 41 = 41\,(41 + 1 + 1) = 41 \cdot 43.$$

Пусть некоторое утверждение справедливо в нескольких частных случаях. Рассмотрение всех остальных случаев или совсем невозможно, или требует большого числа вычислений. Как же узнать, справедливо ли это утверждение вообще? Этот вопрос иногда удается решить посредством применения особого метода рассуждений, называемого *методом математической индукции*. Этот метод мы рассмотрим в следующем параграфе.

В математике уже издавна используется индуктивный метод, основанный на том, что то или иное общее утверждение делается на основании рассмотрения лишь нескольких частных случаев. История, например, сохранила следующее высказывание Эйлера: «У меня нет для доказательства никаких других доводов, за исключением длинной индукции, которую я провел так далеко, что никоим образом не могу сомневаться в законе, управляющем образованием этих членов... И кажется невозможным, чтобы закон, который, как было обнаружено, выполняется, например, для 20 членов, нельзя было бы наблюдать и для следующих».

Веря в непогрешимость индукции, ученые иногда допускали грубые ошибки. К середине семнадцатого столетия в математике накопилось немало ошибочных выводов. Стала сильно ощущаться потребность в научно обоснованном методе, который позволял бы делать общие выводы на основании рассмотрения нескольких частных случаев. И такой метод был разработан. Основная заслуга в этом принадлежит французским математикам Паскалю (1623 — 1662) и Декарту, а также швейцарскому математику Якобу Бернулли (1654 — 1705).

Упражнения

2090. Какие из данных утверждений являются общими и какие частными:

а) число 16 четное;

б) всякое число, оканчивающееся цифрой 6, четное;

в) синус любого угла по абсолютной величине не превышает 1;

г) синус угла 50° меньше 1;

д) десятичный логарифм числа —2 не определен;

е) отрицательные числа не имеют десятичных логарифмов?

2091. Числа 24, 64, 104 делятся на 4. Можно ли на основании этого сказать, что любое число, оканчивающееся цифрой 4, делится на 4?

2092. Синусы углов 45° и 60° иррациональны $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right.$ и $\left.\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Можно ли из этого заключить, что синусы любых углов иррациональны?

Метод математической индукции § 262

В основе метода математической индукции лежит следующий принцип.

Некоторое утверждение верно при любом натуральном n, если:

1) ***оно верно при*** $n = 1$

и

2) ***из справедливости этого утверждения при каком-либо произвольном значении*** $n = k$ $(k \geqslant 1)$ ***следует, что оно верно и при*** $n = k + 1$.

Действительно, при $n = 1$ утверждение верно в силу 1). Далее, $2 = 1 + 1$, а потому в силу 2) утверждение верно при $n = 2$; $3 = 2 + 1$, поэтому в силу 2) утверждение верно и при $n = 3$. Вообще, любое натуральное число n может быть получено из 1 путем последовательного прибавления к нему единицы $n - 1$ раз. При каждом таком прибавлении мы получаем натуральное число, для которого рассматриваемое утверждение верно. Поэтому оно верно и для натурального числа n.

Метод доказательства, основанный на использовании этого принципа, называется *методом математической индукции.*

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Найти сумму

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Сначала найдем суммы одного, двух, трех и четырех слагаемых. Имеем:

$$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2};$$

$$S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3};$$

$$S_3 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4};$$

$$S_4 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} = \frac{3}{4} + \frac{1}{20} = \frac{4}{5}.$$

В каждом из этих случаев получается дробь, в числителе которой стоит число слагаемых, а в знаменателе — число, на

единицу большее числа слагаемых. Это позволяет высказать гипотезу (предположение), что при любом натуральном n

$$S_n = \frac{n}{n+1}.$$

Для проверки этой гипотезы воспользуемся методом математической индукции.

1) При $n = 1$ гипотеза верна, так как $S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$.

2) Предположим, что гипотеза верна при $n = k$, то есть

$$S_k = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}.$$

Докажем, что тогда гипотеза должна быть верной и при $n = k + 1$, то есть

$$S_{k+1} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}.$$

Действительно,

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)}.$$

Но по предположению $S_k = \frac{k}{k+1}$. Поэтому

$$S_{k+1} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}.$$

Таким образом, исходя из предположения, что гипотеза $S_n = \frac{n}{n+1}$ верна при $n = k$, мы доказали, что она верна и при $n = k + 1$. Поэтому формула

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

верна при любом натуральном n.

Пример 2. Доказать, что n-й член арифметической прогрессии равен

$$a_n = a_1 + (n - 1)\, d, \qquad (1)$$

где a_1 — первый член, а d — разность этой прогрессии.

Этот пример отличается от предыдущего тем, что строить гипотезу здесь не надо, она дана. Нужно только доказать, что эта гипотеза верна.

Доказательство будем вести методом математической индукции.

1) При $n = 1$ формула (1) имеет вид:

$$a_1 = a_1,$$

так что при $n = 1$ эта формула верна.

2) Предположим, что она верна при $n = k$, то есть

$$a_k = a_1 + (k - 1)\, d,$$

и покажем, что в таком случае она должна быть верной и при $n = k + 1$, то есть

$$a_{k+1} = a_1 + kd.$$

Действительно,

$$a_{k+1} = a_k + d = [a_1 + (k - 1)\,d] + d = a_1 + kd,$$

что и требовалось доказать.

Оба условия принципа математической индукции выполняются, и потому формула (1) верна для любого натурального числа n.

Пример 3. Доказать тождество

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha. \qquad (2)$$

1) При $n = 1$ обе части формулы (2) принимают один и тот же вид, $\cos\alpha + i\sin\alpha$, так что при $n = 1$ эта формула верна.

2) Пусть она верна при $n = k$, то есть

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^k = \cos k\alpha + i\sin k\alpha.$$

Тогда

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{k+1} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^k \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha) =$$
$$= (\cos k\alpha + i\sin k\alpha)(\cos\alpha + i\sin\alpha) =$$
$$= (\cos k\alpha\cos\alpha - \sin k\alpha\sin\alpha) + i(\cos k\alpha\sin\alpha + \sin k\alpha\cos\alpha) =$$
$$= \cos(k\alpha + \alpha) + i\sin(k\alpha + \alpha) = \cos(k + 1)\alpha + i\sin(k + 1)\alpha.$$

Но это означает, что формула (2) верна и при $n = k + 1$.

Оба условия принципа математической индукции выполняются, и потому формула (2) верна при любом натуральном n.

Пример 4. Доказать, что при любом натуральном n* (3)

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

1) При $n = 1$ формула (3) принимает вид: $x' = 1$.
Это соотношение, как было доказано в главе X, верно. Значит, при $n = 1$ формула (3) верна.

2) Предположим, что она верна при $n = k$, то есть $(x^k)' = kx^{k-1}$, и, исходя из этого, докажем, что она должна быть верна и при $n = k + 1$, то есть $(x^{k+1})' = (k + 1)\,x^k$. Действительно, представляя x^{k+1} в виде $x^k \cdot x$ и используя правило дифференцирования произведения, получаем:

$$(x^{k+1})' = (x^k \cdot x)' = (x^k)'\,x + x^k \cdot (x)'.$$

Но по предположению $(x^k)' = kx^{k-1}$, к тому же $x' = 1$. Поэтому

$$(x^{k+1})' = kx^{k-1} \cdot x + x^k \cdot 1 = (k + 1)\,x^k.$$

Итак, оба условия принципа математической индукции выполняются, и потому формула (3) верна при любом натуральном n.

Упражнения

Доказать тождества (№ 2093—2096):

2093. $\dfrac{1}{1\cdot3} + \dfrac{1}{3\cdot5} + \dfrac{1}{5\cdot7} + \ldots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$.

2094. $\dfrac{1}{a(a+1)} + \dfrac{1}{(a+1)(a+2)} + \ldots + \dfrac{1}{(a+n-1)(a+n)} = \dfrac{n}{a(a+n)}$.

---

* Если $x \neq 0$; случай, когда $x = 0$, требует, строго говоря, специального рассмотрения.

2095. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2096. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

2097. Вывести формулу общего члена геометрической прогрессии.

2098. Доказать, что при любом натуральном n число $n^3 + 5n$ делится без остатка на 6.

2099. На сколько частей делится плоскость n различными прямыми, проведенными в этой плоскости через одну ее точку?

2100. Методом математической индукции доказать тождество:

$$\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \ldots \cos 2^n\alpha = \frac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha}.$$

Какой еще метод вы можете предложить для доказательства этого тождества?

2101. Доказать, что при любом натуральном n и $a \geqslant -1$

$$(1+a)^n \geqslant 1 + na.$$

2102. Доказать, что при любом n с помощью циркуля и линейки с заданной единицей длины можно построить отрезок длиной в $\sqrt{n}$.

2103. Доказать, что при любом натуральном n

$$|\sin nx| \leqslant n\,|\sin x|.$$

2104. Доказать, что при любом натуральном n

$$[f^n(x)]' = nf^{n-1}(x) \cdot f'(x).$$

2105. Используя формулу задачи № 2104, найти производные следующих функций:

1) $y = \sin^6 x + \cos^6 x$; 3) $y = \left(\dfrac{x-1}{x}\right)^5$; 5) $y = \left(\dfrac{2x^2-1}{x^3}\right)^3$;

2) $y = \sin^3 2x$; 4) $y = (x^2 - 3x + 5)^4$; 6) $y = (\sin x - \cos x)^4$.

Другой вариант метода математической индукции § 263

Некоторые утверждения справедливы не для всех натуральных n, а лишь для натуральных n, начиная с некоторого числа p. Такие утверждения иногда удается доказать методом, несколько отличным от того, который описан в § 262, но вполне аналогичным ему. Состоит он в следующем.

Утверждение верно при всех натуральных значениях $n \geqslant p$, если:

1) ***оно верно при $n = p$*** (а не при $n = 1$, как было в § 262);

2) ***из справедливости этого утверждения при $n = k$, где $k \geqslant p$*** (а не $k \geqslant 1$, как в § 262), ***вытекает, что оно верно и при $n = k + 1$.***

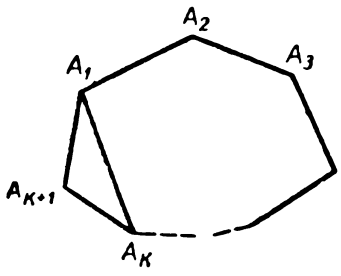

Рис.338.

Поясним это на следующем примере.

Доказать, что сумма S_n внутренних углов любого выпуклого многоугольника равна $(n-2)\pi$, где n — число сторон этого многоугольника*:

$$S_n = (n-2)\pi. \qquad (1)$$

Это утверждение имеет смысл не для всех натуральных n, а лишь для $n \geqslant 3$. Поэтому метод, описанный в § 262, здесь использовать нельзя. Однако можно использовать другой вариант индукции, описанный на предыдущей странице.

1) При $n = 3$ наше утверждение принимает вид: $S_3 = \pi$. Но сумма внутренних углов любого треугольника действительно равна π. Поэтому при $n = 3$ формула (1) верна.

2) Пусть эта формула верна при $n = k$, то есть $S_k = (k-2)\pi$, где $k \geqslant 3$. Докажем, что в таком случае имеет место и формула $S_{k+1} = (k-1)\pi$.

Пусть $A_1A_2 \ldots A_kA_{k+1}$ — произвольный выпуклый $(k+1)$-угольник (рис. 338). Соединив точки A_1 и A_k, мы получим выпуклый k-угольник $A_1A_2 \ldots A_{k-1}A_k$. Очевидно, что сумма углов $(k+1)$-угольника $A_1A_2 \ldots A_kA_{k+1}$ равна сумме углов k-угольника $A_1A_2 \ldots A_k$ плюс сумма углов треугольника $A_1A_kA_{k+1}$. Но сумма углов k-угольника $A_1A_2 \ldots A_k$ по предположению равна $(k-2)\pi$, а сумма углов треугольника $A_1A_kA_{k+1}$ равна π. Поэтому

$$S_{k+1} = S_k + \pi = (k-2)\pi + \pi = (k-1)\pi.$$

Итак, оба условия принципа математической индукции выполняются, и потому формула (1) верна при любом натуральном $n \geqslant 3$.

Упражнения

2106. На сколько треугольников может быть разбит выпуклый n-угольник своими непересекающимися диагоналями?

2107. Доказать, что при $n \geqslant 3$

$$2^n \geqslant 2n + 1.$$

2108. При каких натуральных значениях n справедливо неравенство

$$2^n > n^2?$$

---

* Это утверждение верно и для невыпуклых многоугольников, если, правда, стороны их пересекаются только в вершинах. Мы же для простоты ограничиваемся лишь выпуклыми многоугольниками.

Доказательство методом математической индукции состоит из двух этапов.

1-й этап. Проверяем, верно ли утверждение при $n = 1$ (или при $n = p$, если речь идет о методе, описанном в § 263).

2-й этап. Допускаем, что утверждение верно при $n = k$, и, исходя из этого, доказываем, что оно верно и при $n = k + 1$.

Каждый из этих этапов по-своему важен. В § 261, рассматривая пример $f(n) = n^2 + n + 41$, мы убедились, что утверждение может быть верным в целом ряде частных случаев, но неверным вообще. Этот пример убеждает нас в том, насколько важен 2-й этап доказательства методом математической индукции. Опустив его, можно прийти к неверному выводу.

Не следует, однако, думать, что 1-й этап менее важен, чем 2-й. Сейчас мы приведем пример, показывающий, к какому нелепому выводу можно прийти, если опустить 1-й этап доказательства.

«Теорема». ***При любом натуральном n число $2n + 1$ четное.***

«Доказательство». Пусть эта теорема верна при $n = k$, то есть число $2k + 1$ четное. Докажем, что тогда число $2(k + 1) + 1$ также четно.

Действительно,

$$2(k + 1) + 1 = (2k + 1) + 2.$$

По предположению число $2k + 1$ четно, а поэтому его сумма с четным числом 2 также четна. Теорема «доказана».

Если бы мы не забыли проверить, верна ли наша «теорема» при $n = 1$, мы не пришли бы к такому «результату».

ЗАДАЧИ НА ПОВТОРЕНИЕ ВСЕГО КУРСА АЛГЕБРЫ И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

2109. На одном складе a тонн угля, на другом b тонн. Ежедневно на оба склада поступает по c тонн угля. Через сколько дней на первом складе будет угля в 2 раза больше, чем на втором?

2110. Два крана, работая одновременно, наполняют сосуд за 6 *ч*. За какое время наполняет сосуд каждый кран в отдельности, если известно, что один первый кран наполняет сосуд на 5 *ч* дольше, чем один второй?

2111. Поезд был задержан на 16 *мин* и нагнал опоздание на перегоне 80 *км*, увеличив скорость на 10 *км/ч* по сравнению с обычной. Найти обычную скорость поезда.

2112. На вспашку поля один тракторист тратит времени в 1,2 раза больше другого, но на 3 *ч* меньше третьего тракториста. Работая вместе, три тракториста вспахали поле за 4 *ч*. За сколько часов может вспахать поле каждый из трактористов?

2113. Велосипедист совершил поездку из A в B и обратно. Путь состоял из подъема, горизонтального участка и спуска. На горизонтальном участке он ехал со скоростью 20 *км/ч*, на спуске — 25 *км/ч*, а на подъеме — 15 *км/ч*. Из A в B велосипедист ехал 2 *ч* 22 *мин*, а из B в A — 2 *ч* 14 *мин*. Определить длину подъема и длину спуска, если горизонтальная часть пути составляет 30 *км*.

2114. Два самолета вылетают одновременно навстречу друг другу из городов A и B, расстояние между которыми равно 1800 *км*. Встреча между ними произошла через час после вылета. Первый самолет прибыл в город B на 27 *мин* раньше, чем второй в город A. Найти скорости самолетов.

2115. Один сплав состоит из двух металлов, входящих в отношении 1 : 2, а другой содержит те же металлы в отношении 3 : 4. Сколько частей каждого сплава нужно взять, чтобы получить третий сплав, содержащий те же металлы в отношении 15 : 22?

2116. Два пешехода, находясь друг от друга на расстоянии 10,2 *км*, отправляются одновременно из пунктов A и B, двигаясь по прямой AB. Они встретятся через 1 *ч* 12 *мин*, если будут идти навстречу друг другу, и через 6 *ч* 48 *мин*, если будут идти в одном направлении. Найти скорость каждого пешехода.

2117. В шахматном турнире двое из участников выбыли, сыграв по пять партий каждый. Поэтому на турнире было сыграно всего 38 партий. Сколько участников было в начале турнира? Сыграли ли между собой выбывшие из турнира шахматисты?

2118. Пароход идет от Горького до Астрахани 5 суток, а от Астрахани до Горького — 7 суток. Сколько времени будут плыть от Горького до Астрахани плоты?

2119*. Два конькобежца выбегают одновременно: первый из A в B, а второй из B в A — и встречаются на расстоянии 300 *м* от A. Пробежав дорожку AB до конца, каждый из них поворачивает назад и встречает другого на расстоянии 400 *м* от B. Найти длину дорожки AB.

2120. Решить уравнения:

а) $a^2x - 1 = a + x$;

б) $ax = b - x$;

в) $\dfrac{a(1-bx)}{a+b} + \dfrac{b+a^2x}{a-b} = \dfrac{ax(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$.

2121. Решить уравнения:

а) $|2x - 3| = a$;

б) $|4 - 5x| = |8 - x|$;

в)* $|x + 1| + |x - 1| + |x - 3| = 3 + x$.

2122. (У с т н о.) Сколько решений имеет каждая из данных систем уравнений:

а) $\begin{cases} x - 2y = 0, \\ 3x - y = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4x + 5y = 3, \\ 2x - 6y = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x - 0{,}5y = 3{,}5, \\ 2x - y = 7; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x - 9y = 0, \\ 0{,}5x - 4{,}5y = 2; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x - 3y = 5, \\ 4y - 6x = 7? \end{cases}$

2123. Решить системы уравнений:

а) $\begin{cases} (a-1)x - y = 1, \\ x + ay = a; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x - ay = a + 1, \\ ax - 2y = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1, \\ \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{y} = 5a - 3. \end{cases}$

2124. Найти действительные решения систем уравнений:

а) $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -\frac{1}{20}, \\ xy = 20; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ x - y = b; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 3, \\ x + y = 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + y = a, \\ xy = b. \end{cases}$

2125. Доказать неравенства:

а) $\frac{a+b}{1+a+b} < \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$ $(a > 0,\ b > 0)$;

б) $a + 4b \geqslant 4\sqrt{ab}$ $(a > 0,\ b > 0)$;

в) $\frac{\sqrt{a}}{b} + \frac{\sqrt{b}}{a} \geqslant \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}$;

г) $\frac{a + bx^4}{x^2} \geqslant 2\sqrt{ab}$ $(a > 0,\ b > 0)$.

2126. У продавца неточные весы (коромысла весов имеют различные длины). Зная это, продавец отвешивает каждому покупателю половину товара на одной чашке, а половину — на другой чашке весов, думая, что тем самым он компенсирует неточность весов. Прав ли он?

2127*. Доказать, что из всех треугольников с данным периметром P наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник.

2128. Доказать, что для любого острого угла φ

$$\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{ctg}\varphi \geqslant 2.$$

2129. Решить неравенство

$$1 < \frac{x-6}{1-x} < 3.$$

2130*. Для каких значений a неравенство

$$-3 < \frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} < 2$$

удовлетворяется при всех значениях x?

2131. Решить уравнения:

а) $x - 6 = 1 + \sqrt{x-1}$; в) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-4} = 3$.

б) $\sqrt{x-1} + \sqrt{3x+1} = 2$;

2132. При каких значениях a уравнение

$$(a-3)\,x^2-4x-2a=0$$

имеет:

а) действительные корни;

б) действительные корни одного знака;

в) действительные корни разных знаков?

2133. Решить уравнения:

а) $\sqrt{(x-2)^2}=-(x-2)$; в) $\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x-4)^2}=2$.

б) $\sqrt{(x^2-x+1)^2}=x^2-x+1$;

2134. Построить график функции:

$$y=\sqrt{x^2}+\sqrt{(x-1)^2}.$$

2135. Что больше:

а) 3^{600} или 6^{300};

б) $(2\sqrt{3})^{\frac{3}{2}}$ или $(3\sqrt{2})^{\frac{3}{2}}$;

в) $(2\sqrt{21})^{-\frac{2}{7}}$ или $(4\sqrt{5})^{-\frac{2}{7}}$?

2136. Средний годовой процент прироста населения из года в год остается постоянным. Если бы он увеличился на $k\%$, то через n лет численность населения была бы в два раза больше, чем при нормальных условиях. Определить годовой процент прироста населения.

2137. Найти косинус, тангенс и котангенс угла φ, если

$$\sin\varphi=\frac{5}{13}.$$

2138. Найти синус, тангенс и котангенс угла φ, если

$$\cos\varphi=-\frac{3}{5}.$$

2139. Найти синус, косинус и котангенс угла φ, если

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{2}.$$

2140. Найти синус, косинус, тангенс и котангенс угла

$$\arcsin\frac{1}{3}.$$

2141. Найти синус, косинус, тангенс и котангенс угла

$$\arccos\left(-\frac{12}{13}\right).$$

2142. Найти синус, косинус, тангенс и котангенс угла

$$\operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{3}\right).$$

Доказать тождества (№ 2143—2147):

2143. $\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}+\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=2\left|\operatorname{cosec}\alpha\right|$.

2144. $\frac{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha-6}{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha+2}=\cos 4\alpha$.

2145. $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\frac{1+\sin 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}$.

2146. $2\sin 5\alpha\sin 3\alpha+\cos 8\alpha=\cos 2\alpha$.

2147. $\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

Упростить выражения (2148—2150):

2148. $\frac{1-\sin^6\alpha-\cos^6\alpha}{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}$.

2149. $\sqrt{1+\cos\varphi}-\sqrt{1-\cos\varphi}\quad\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$.

2150. а) $\operatorname{tg}1^\circ\cdot\operatorname{tg}2^\circ\cdot\operatorname{tg}3^\circ\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}89^\circ$;
б) $\lg\operatorname{tg}1^\circ\cdot\lg\operatorname{tg}2^\circ\cdot\ldots\cdot\lg\operatorname{tg}89^\circ$.

2151. При каких значениях a данные уравнения имеют действительные корни:

а) $\lg^2 x-\lg x+a=0$;
б) $\cos^2 x+\cos x+a=0$?

2152. Числа α, β и γ составляют арифметическую прогрессию с разностью $\frac{\pi}{3}$. Доказать, что

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\cdot\operatorname{tg}\alpha=-3.$$

2153. Доказать равенства:

а) $\operatorname{tg}20^\circ\operatorname{tg}40^\circ\operatorname{tg}80^\circ=\sqrt{3}$;

б) $\sin 18^\circ\cos 36^\circ=0{,}25$;

в) $\frac{1-\operatorname{tg}^2 15^\circ}{1+\operatorname{tg}^2 15^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2154. Вычислить:

а)* $\sin\left[\frac{1}{2}\arccos(-0{,}8)\right]$;

б) $\sin[\operatorname{arc}\operatorname{tg}2+\operatorname{arcctg}(-2)]$;

в) $\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}\arcsin(-0{,}6)\right]$.

2155. Проверить равенства:

а) $\operatorname{arctg}\frac{3}{5}+\operatorname{arctg}\frac{1}{4}=\frac{\pi}{4}$;

б) $\arcsin 0{,}8-\arccos 0{,}6=0$.

Решить уравнения (№ 2156—2179):

2156. $\sin x-\cos 2x=2$.

2157. $\sin x\cos 3x=-1$.

2158. $\cos 2x=\sin x\cos 2x$.

2159. $2\cos^2 x-7\sin x-5=0$.

2160. $\frac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}x}=0$.

2161. $3\sin x-2\cos x=6$.

2162. $\sqrt{3}\cos x=-\sin x$.

2163. $\cos^2 x-3\sin x\cos x+1=0$.

2164. $\cos(\cos x)=\sin(\sin x)$.

2165. $\sin x\cos x=\frac{1}{\sqrt{3}}\cos^2 x$.

2166. $\cos x\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}=\frac{3}{2}$.

2167. $\sin^4 x=1+\cos^2 x$.

2168. $\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=-1$.

2169. $3\cos 4x=7\sin 2x$.

2170. $2\cos^2 x+\sin^2 x=\frac{3}{2}\sin 2x$.

2171. $\cos 3x\cos 5x=\cos x\cos 7x$.

2172. $\sin^2 2x+\sin^2 x=1$.

2173. $\sin x-\sqrt{3}\cos x=-1$.

2174. $\sin x-4\cos x+\operatorname{tg}x=4$.

2175. $\cos^2 x+3\cos^2\frac{x}{2}=2$.

2176. $\cos 7x-\sin 5x=$
$=\sqrt{3}(\cos 5x-\sin 7x)$.

2177. $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin x+\sin\frac{\pi}{3}$.

2178. $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=$
$=\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$.

2179. $(\operatorname{tg}x)^{\cos x}=(\operatorname{ctg}x)^{\cos x}$.

Решить системы уравнений (№ 2180—2183):

2180*. $\begin{cases}x+y=\frac{2\pi}{3},\\ \sin x+\cos y=\frac{1+\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$

2181. $\begin{cases}2^{\sin x+\cos y}=1,\\ 9^{\sin^2 x+\cos^2 y}=3.\end{cases}$

2182. $\begin{cases}\sin x+\cos y=\frac{1-\sqrt{3}}{2},\\ \sin x\cdot\cos y=-\frac{\sqrt{3}}{4}.\end{cases}$

2183. $\begin{cases}\cos x\cos y=\frac{1}{4},\\ \operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}y=-\frac{3}{4}.\end{cases}$

2184. Является ли последовательность всех положительных корней уравнения $\cos\frac{1}{x}=0$:

а) конечной; б) ограниченной?

2185. Крайние члены арифметической прогрессии равны 5 и 25. Найти два равноотстоящих от них члена, произведение которых равно 189.

2186. Найти четыре числа, из которых первые три составляют геометрическую прогрессию, а последние три — арифметическую; сумма крайних чисел равна 14, а сумма средних равна 12.

2187. Арифметическая и возрастающая геометрическая прогрессии имеют первые члены, равные каждый 2, и равные третьи члены. Второй член арифметической прогрессии на 4 больше второго члена геометрической прогрессии. Найти эти прогрессии.

2188. Найти острый угол прямоугольного треугольника, если известно, что его стороны образуют геометрическую прогрессию.

2189. Дан правильный треугольник, сторона которого равна a. В треугольник вписан круг, в круг снова вписан правильный треугольник, в треугольник — круг и так далее до бесконечности. Определить сумму площадей всех кругов и сумму длин всех окружностей.

2190. Найти бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, если ее сумма равна 3, а сумма квадратов ее членов равна 4,5.

2191. При каких значениях x числа $\lg 2$, $\lg(2^x - 1)$ и $\lg(2^x + 1)$ образуют арифметическую прогрессию?

2192. Доказать, что $\log_2 3$ — число иррациональное.

2193. Вычислить:

а) $\log_{3\sqrt{3}} 27$; в) $\log_{\pi} \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$; д) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_{25}2-5} - 5$;

б) $\lg 1\frac{1}{2} - \lg 150$; г) $2^{4\log_2 3-1} - 1$; е) $2^{\log_{2\sqrt{2}}15}$.

Решить уравнения (№ 2194—2208):

2194. $2^{2x} \cdot 9^x - 2 \cdot 6^{3x-1} + 4^{2x-1} \cdot 3^{4x-2} = 0$.

2195. $9^x - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1}$.

2196. $8^x + 18^x - 2 \cdot 27^x = 0$.

2197. $3^x - 50 \cdot 2^x = 5 \cdot 3^{\frac{x}{2}} \cdot 2^{\frac{x}{2}}$.

2198*. $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{\sqrt{2}-\sqrt{3}}\right)^x = 4$.

2199. $\lg(x + a) = \lg x + \lg a$.

2200*. $x^{\lg x^2 - 3} = 100$.

2201. $\lg(3x - 4) = \lg(6x + 2) - 1$.

2202. $x^{\log^2 x^{10}+\log_2^2 x^4-4}=\frac{1}{x}$.

2203. $\log_3^2 4x-\log_3 12x=1$.

2204. $\lg^2 x^3-5\lg x^2+1=0$.

2205. $\sqrt{\lg\left(4^{\sqrt{x}}+2^{1+\sqrt{x}}+9992\right)}=2$.

2206. $2x-\lg\left(5^{2x}+4x-16\right)=\lg 4^x$.

2207. $\log_3\frac{3}{x}+\log_3^3 x=1$.

2208. $\lg\sin x=\lg\cos x$.

2209. Вычислить:

а) $\log_7\log_7\sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7}}}$;

б) $10^{2+\frac{1}{2}\lg 16}$;

в) $\log_3 5\cdot\log_{25}27$;

г) $\log_{ab} b$, если $\log_{ab} a=4$.

2210. Доказать, что уравнение $\lg\cos x=\cos x$ не имеет корней.

2211. Что больше:

а) $\log_3 2$ или $\log_2 3$;

б) $\sqrt[3]{0{,}01}$ или $\sqrt[5]{0{,}001}$?

2212. Найти все значения x, для которых

$$\lg\frac{x+3}{x+4}>\lg\frac{x+5}{x+2}.$$

2213. Решить системы уравнений:

а) $\begin{cases}\log_2(xy)=5,\\ \log_{\frac{1}{2}}\frac{x}{y}=1;\end{cases}$

б) $\begin{cases}\log_2 x+\log_2 y=5,\\ \log_2(x^2+y^2)=\log_2 10+3;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\lg x\cdot\lg(xy)=2,\\ \lg\frac{x}{y}=3;\end{cases}$

г) $\begin{cases}\sqrt[10]{2^x}\cdot\sqrt{\sqrt[5]{2^y}}=\sqrt[x]{128},\\ \lg(x+y)=\lg 40-\lg(x-y);\end{cases}$

д) $\begin{cases}5(\lg_y x+\lg_x y)=26,\\ xy=64.\end{cases}$

2214. Световой луч, проходя через пластмассовую пластинку, теряет $\frac{1}{3}$ своей интенсивности. Сколько таких пластинок можно поставить на пути луча, чтобы при прохождении через них потерялось не более $\frac{211}{243}$ его первоначальной интенсивности?

2215. Построить графики функций:

а) $y = |\log_2 x|$; б) $y = \log_2 |x|$; в) $y = \log_2 |-x|$.

2216. Найти области определения функций:

а) $y = \sqrt{-5x^2 + 8x + 4}$; г) $y = \frac{1}{\frac{x}{2^{3x-1}} - 1}$;

б) $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}$; д) $y = \frac{\sqrt{x}}{\operatorname{tg} x - 1}$;

в) $y = \sqrt{\frac{x-2}{x+3}} + \sqrt{\frac{x+1}{5-x}}$; е) $y = \lg(1{,}5 + \sin x + \cos x)$.

2217. Доказать, что функция $f(x) = \frac{(1+2^x)^2}{2^x}$ четная, а функция $f(x) = \lg\frac{1+x}{1-x}$ нечетная.

2218. Функция Дирихле определяется следующим образом:

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ 1, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$$

а) Является ли эта функция четной?

б) Доказать, что эта функция периодична, причем любое рациональное число является ее периодом. Есть ли у этой функции наименьший положительный период?

в) Доказать, что никакое иррациональное число не является периодом данной функции.

2219. Доказать, что производная периодической функции является периодической функцией. Привести примеры.

2220. Доказать, что производная четной функции есть функция нечетная, а производная нечетной функции — функция четная. Привести примеры

2221. В каких интервалах существуют функции, обратные данным:

а) $y = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$; б) $y = \cos^2 x$?

2222. На одном и том же чертеже построить графики данной и обратной к ней функций:

а) $y = 2x - 1$; б) $y = 3^{x+1}$.

2223. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x\sqrt{x} - 3\sqrt{3}}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$;

б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{\sqrt{x^3 + 9} - 3}$;

в) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{3x^2}$;

г) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x + a) + \sin(x - a)}{x}$.

2224. Вычислить

$$x^{25} - 8x^{14} + 5x^4 - 4x^2 - 10 \text{ при } x = i.$$

2225. Доказать, что числа $\dfrac{1 - i}{1 + i}$ и $\dfrac{1 + i}{1 - i}$ являются противоположными.

2226. Выполнить указанные действия:

а) $\left(\dfrac{2i - 1}{1 + i} + \dfrac{5 - 2i}{4 - i}\right) \cdot \dfrac{34}{1 - i}$;

б) $\dfrac{1 + i \operatorname{tg} \alpha}{1 - i \operatorname{tg} \alpha}$;

в) $\dfrac{(2 + i)(1 - i)}{3 - 2i}$;

г) $(2 + i\sqrt{2})^3 + (2 - i\sqrt{2})^3$.

2227. Доказать, что кубы сопряженных чисел представляют собой сопряженные числа.

2228. Найти действительные значения x и y из уравнений:

а) $(xi - y)^2 = 6 - 8i + (x + iy)^2$;

б) $\dfrac{x - 2}{1 - i} + \dfrac{y - 3}{1 + i} = 1 - 3i$;

в) $\dfrac{i}{x} + \dfrac{i}{y} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} + \dfrac{5i}{y}$.

2229. Показать, что произведение любых двух корней уравнения $x^3 = 1$ есть также корень этого уравнения.

2230. Вычислить

$$(1 + \cos \alpha + i \sin \alpha)^n.$$

(Указание Воспользоваться формулой Муавра.)

2231. Показать, что если n кратно 3, то

$$\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right)^n = 2.$$

2232. На плоскости даны две точки, соответствующие комплексным числам: $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$. Где находится точка, соответствующая числу $\dfrac{1}{2}(z_1 + z_2)$?

2233. Выражение $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^5$ преобразовать двумя способами: с помощью формулы Муавра и с помощью формулы бинома Ньютона. Сравнивая результаты, выразить $\sin 5\varphi$ и $\cos 5\varphi$ через $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$.

2234. Тело движется по закону $s(t) = t^3$ (s — путь в метрах, t — время в секундах). В некоторый момент τ *сек* его мгновенная скорость равна средней скорости в интервале от t_1 *сек* до t_2 *сек* ($t_2 > t_1$). Доказать, что $t_1 < \tau < t_2$.

2235. Написать уравнение касательной к кривой $y = \sqrt{x}$ в точке с абсциссой $x = 4$.

2236. Написать уравнения касательных к параболам $y = x^2$ и $y = (x - 2)^2$ в точке их пересечения.

2237. Найти производные следующих функций:

а) $\sin^4 x$; в) $\cos^5 (x - 1)$; д) $(x^2 + 1)^5$;

б) $\cos^3 2x$; г) $\cos^4 (2 - x)$; е) $(3 - 2x)^3$.

2238. Тело совершает гармоническое колебание с амплитудой A, частотой ω и начальной фазой φ. Найти скорость и ускорение этой точки

2239. Могут ли две разные функции иметь равные производные? Ответ пояснить примерами.

2240. Исследовать данные функции и построить их графики:

а) $y = x - 3x^3$; в) $y = \cos^2 \frac{x}{2}$;

б) $y = x^5 - 4x$; г) $y = \cos x (1 + \sin x)$.

2241. Пусть $C_n^k = C_n^r$. Доказать, что либо $k = r$, либо $k = n - r$.

2242. Доказать, что 1000-е производные функций $(2x^2 + 7)^{100}$ и $(7x^2 + 2)^{100}$ равны между собой.

2243. Пусть $(x - 2)^{100} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{100} x^{100}$. Найти:

а) a_{97};

б) $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}$;

в) $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + 100a_{100}$.

2244. Доказать, что квадрат суммы n чисел равен сумме квадратов этих чисел, сложенной со всевозможными их удвоенными попарными произведениями.

2245. Доказать, что если T — период функции $f(x)$, то при любом натуральном n nT — также период этой функции.

2246. Доказать тождество

$$\lg (a_1 a_2 \ldots a_n) = \lg a_1 + \lg a_2 + \ldots + \lg a_n$$
$$(a_1 > 0,\ a_2 > 0,\ \ldots,\ a_n > 0).$$

2247. Доказать, что при любом натуральном n $\sin nx$ и $\cos nx$ выражаются рационально через $\sin x$ и $\cos x$.

2248. Доказать неравенство

$$|a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|.$$

2249. Доказать тождество

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}_{n \text{ радикалов}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

2250. Проверить справедливость неравенства

$$\sin^{2n}\alpha + \cos^{2n}\alpha \leqslant 1,$$

где n — натуральное число.

2251. Доказать, что производная суммы любого фиксированного числа дифференцируемых функций равна сумме производных этих функций.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ VII

1024. 1) 1; 2) 7; 3) $5\sqrt{2}$; 4) 5; 5) $3\sqrt{65}$; 6) 25. 1025. $\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{5}+3}{2}$. 1026. $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$; $N\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 1027. $M(\sqrt{3}; 1)$; $N(1; 0)$. 1028. а) $\frac{1}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\frac{1}{2}$; д) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; е) -1. 1029. $\cos\alpha$. 1030. $\frac{1}{2}$. 1031. 0. 1032. 1. $\left(\alpha \neq \frac{\pi}{2}+n\pi\right)$. 1033. 1 $\left(\alpha \neq \frac{\pi}{2}+n\pi;\ \beta \neq \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$. 1034. $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta$. 1035. а) $\frac{24-5\sqrt{21}}{65}$; б) $\frac{3\sqrt{3}+4}{10}$. 1036. $\frac{36}{325}$ и $\frac{204}{325}$. 1037. $\frac{4\sqrt{2}-\sqrt{5}}{9}$. 1038. $\frac{\sqrt{5}-4\sqrt{2}}{9}$. 1039. $\frac{4}{5}$. 1040. а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) 1; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; д) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 1044. 1 $(\alpha \neq n\pi)$. 1045. 1 $\left(\alpha \neq n\pi,\ \beta \neq \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$. 1046. $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\beta$. 1047. $\cos\alpha\cos\beta\left(\alpha \neq \frac{\pi}{2}+n\pi,\ \beta \neq \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$. 1048. $-0,4+0,3\sqrt{3}$, если $\pi+2n\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}+2n\pi$; $-0,4-0,3\sqrt{3}$, если $\frac{3}{2}\pi+2k\pi < \alpha < 2\pi+2k\pi$. 1049. 0 и $-\frac{\sqrt{39}}{8}$. 1050. $-\frac{56}{65}$ и $-\frac{16}{65}$. 1051. $\frac{2}{9}(1+\sqrt{10})$. 1052. $\frac{\sqrt{15}-2}{6}$. 1053. $\frac{\sqrt{2}}{10}$. 1054. $\frac{13}{14}$. 1055. $-2-\sqrt{3}$. 1056. б) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; г) 1. 1057. $-\frac{16}{63}$; $-\frac{56}{33}$. 1058. $\frac{56}{33}$; $\frac{16}{63}$. 1059. -1. 1060. $\frac{2}{3}(\sqrt{2}+\sqrt{5})$. 1061. $-2\sqrt{2}$. 1062. $\operatorname{arctg}\frac{1}{5}$. 1063. $\frac{\pi}{2}$. 1065. $\sin 2\alpha = -0,96$; $\cos 2\alpha = -0,28$. 1066. $-\frac{24}{7}$; $-\frac{7}{25}$. 1067. 0,98. 1068. а) В 1-й; б) во 2-й; в) в 3-й; г) в 4-й. 1069. в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{2}{3}\sqrt{3}$. 1072. От $-\frac{1}{2}$ до $+\frac{1}{2}$, включая эти два числа. 1075. $\operatorname{tg} 2\alpha$. 1077. $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg} 2\alpha$ $(\alpha \neq 45° + 180° \cdot n)$. 1078. $\frac{1}{4}\sin 2\alpha$. 1081. б) $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}}$, если $-\pi+4n\pi < \alpha < \pi+4n\pi$, $\sin\alpha = -2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}}$, если $\pi+$

$+4n\pi < \alpha < 3\pi + 4k\pi$; $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$. 1082. $\frac{1}{2}\left(\alpha \neq \frac{n\pi}{2}\right)$. 1083. $2\left(\alpha \neq \right.$ $\left. \neq \frac{n\pi}{2}\right)$. 1086. $\cos 2\alpha \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + n\pi\right)$. 1087. $\cos\alpha - \sin\alpha \left(\alpha \neq \frac{\pi}{4} + n\pi\right)$. 1088. $-\frac{3}{4}$. 1089. $\frac{24}{7}$. 1090. $\frac{1}{2}$. 1091. $-\frac{4}{5}$. 1098. а) $\frac{7}{25}$; б) $-\frac{84}{625}$. 1103. $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$ $\left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$. 1105. $\sqrt{0{,}8}$, $\sqrt{0{,}2}$ и 2, если $\frac{\pi}{2} + 4n\pi <$ $< \alpha < \pi + 4n\pi$; $-\sqrt{0{,}8}, -\sqrt{0{,}2}$ и 2, если $\frac{5}{2}\pi + 4k\pi < \alpha < 3\pi + 4k\pi$. 1106. $3 + 2\sqrt{2}$ или $3 - 2\sqrt{2}$. 1107. $\sqrt{0{,}1}$. 1108. $\sqrt{0{,}9}$. 1109. $-\frac{1}{2}$. 1110. $-\frac{1}{3}$. 1111. $\frac{3}{2}$. 1112. -2. 1114. $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$. 1115. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}$. 1116. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}$. 1117. $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$. 1118. $\frac{\sqrt{3}-2}{4}$. 1119. $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$. 1126. $\frac{1}{2} -$ $- \sin 10° - \cos 20° + \sin 50°$. 1127. $\cos 5° - \cos 75° + \cos 35° - \frac{\sqrt{2}}{2}$. 1130. $\sqrt{2+\sqrt{3}}$. 1131. 0. 1132. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. 1133. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 1134. $\sqrt{2+\sqrt{3}}$. 1135. 0. 1139. $\frac{1}{2} + \sin\alpha = \sin\frac{\pi}{6} + \sin\alpha = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{12}\right)$. 1142. 0. 1143. $-\sqrt{2-\sqrt{3}}$. 1144. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 1145. $-\frac{\sqrt{6}}{2}$. 1146. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 1147. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 1151. $\sqrt{2} + 2\cos\alpha = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos\alpha\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + \cos\alpha\right) = 4\cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\alpha}{2}\right) \times$ $\times \cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\alpha}{2}\right)$. 1155. $-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2\alpha$. 1156. $2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$. 1158. $4\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos 2\alpha$. 1165. $2\sqrt{2}$. 1166. -2. 1169. $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta}$ $\left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + n\pi,\ \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$. 1170. а) $\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)}{\cos\alpha}$. 1184. $y = \frac{1}{2}(1 + \sin 4x)$ — один из примеров; другой укажите сами. 1186. $y = -\left|\operatorname{tg}\frac{\pi x}{5}\right|$ — один из примеров; другой укажите сами. 1215. $A > 0$, $\omega > 0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ (или $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$). 1219. 50 герц. 1220. Минимальные значения при $t = \frac{5}{3} + 4n$, максимальные значения при $t = -\frac{1}{3} + 4n$; нулевые значения при $t = -\frac{4}{3} + 2n$. 1221. а) Минимальные значения при $t = \frac{13\pi}{30} + \frac{2n\pi}{3}$, максимальные значения при $t = \frac{\pi}{10} + \frac{2n\pi}{3}$; нулевые значения при $t = -\frac{\pi}{15} + \frac{n\pi}{3}$. 1222. $2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$. 1223. $\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. 1224. $5\sin\left(x + \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)$. 1225. $5\sin\left(x - \operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)$. 1226. $13\sin\left(x - \operatorname{arctg}\frac{12}{5}\right)$. 1227. $25\sin\left(2x + \pi + \operatorname{arctg}\frac{24}{7}\right)$. 1230. а) -5; 5;

б) 0; 5; в) -13; 13; г) -20; 30; д) 0; $\sqrt[4]{2}$; е) минимальное значение $\frac{1}{\sqrt{2}}$, максимального не существует. **1234.** $A=\sqrt{2}$, $\omega=2$, $\varphi=-\frac{\pi}{4}$. **1236.** $A=5$, $\omega=\pi$, $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$. **1254.** $\operatorname{arctg}\frac{1-\sqrt{5}}{2}+n\pi$; $\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{5}}{2}+k\pi$. **1255.** $2n\pi$. **1256.** x — любое число. **1257.** $\frac{\pi}{6}+\frac{n\pi}{3}$. **1258.** $n\pi$. **1259.** $-\frac{\pi}{4}+n\pi$. **1260.** $\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{4}$. **1261.** $n\pi$. **1262.** $\pm\frac{\pi}{6}+n\pi$. **1263.** $(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{n\pi}{2}$. **1264.** $(2n+1)\pi$; $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3}+2k\pi$. **1265.** $\frac{1}{2}[(-1)^n\arcsin(\sqrt{3}-1)+n\pi]$. **1266.** $\pm\frac{2}{3}\pi+2n\pi$. **1267.** $\pm\arccos\frac{1}{4}+(2n+1)\pi$. **1268.** $(-1)^n\arcsin\frac{8-\sqrt{14}}{10}+n\pi$. **1269.** $(-1)^n\frac{\pi}{6}+n\pi$. **1270.** $2n\pi$. $2k\pi-2\operatorname{arctg}3$. **1271.** $n\pi$, $\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$. **1272.** Нет корней. **1273.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}}{2}+n\pi$. **1274.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+n\pi$. **1275.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+n\pi$; $-\operatorname{arctg}2+k\pi$. **1276.** $\frac{n\pi}{7}$; $\frac{k\pi}{3}$. **1277.** $\frac{n\pi}{8}$. **1278.** $\frac{n\pi}{3}$; $\frac{n\pi}{8}$. **1279.** $\frac{n\pi}{5}$. **1280.** $n\pi$. **1281.** Если $\alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}$, то x — любое число, если $\alpha\neq\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}$, то корней нет. **1282.** $(2n+1)\pi$; $\pm\frac{2\pi}{3}+4k\pi$. **1283.** $2n\pi$; $\frac{\pi}{2}+2k\pi$. **1284.** $\frac{\pi}{2}+n\pi$; $\pm\frac{2}{3}\pi+2k\pi$. **1285.** $n\pi$; $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+k\pi$. **1286.** $\pm 2\arccos\frac{1}{3}+4n\pi$. **1287.** $\frac{n\pi}{2}$. **1288.** $n\pi$; $\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$. **1289.** $60°+360°n$; $150°+360°n$. **1290.** $\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{4}$; $\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$. **1291.** $\frac{n\pi}{4}$. **1292.** Если $\alpha=\beta+2n\pi$, то x — любое число; если $\alpha\neq\beta+2n\pi$, то $x=-\frac{\pi}{2}+\alpha+2k\pi$; $x=-\frac{\pi}{2}+\beta+2m\pi$. **1293.** $\frac{\pi}{10}+\frac{2n\pi}{5}$; $\frac{\pi}{2}+2k\pi$. **1294.** $\frac{2n\pi}{5}$; $\frac{\pi}{2}+k\pi$; $(2m+1)\pi$. **1295.** $\frac{2n\pi}{3}$; $\frac{\pi}{4}+k\pi$; $-\frac{\pi}{2}+2m\pi$. **1296.** $\frac{n\pi}{3}$; $\pm\frac{\pi}{3}+k\pi$. **1297.** $\frac{n\pi}{8}$, где n не равно $4(2k+1)$. **1298.** $n\pi$. **1299.** $\frac{n\pi}{2}$. **1300.** Если $\alpha=\frac{n\pi}{2}$, то x — любое число; если $\alpha\neq\frac{n\pi}{2}$, то корней нет. **1301.** $2n\pi$; $\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$. **1303.** $\pm\arccos\frac{\sqrt{17}-3}{4}+2n\pi$. **1304.** $\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}$. **1305.** $\frac{n\pi}{6}$; $\frac{k\pi}{4}$. **1306.** $\pm\frac{1}{12}\arccos\frac{2}{7}+\frac{n\pi}{6}$. **1307.** $\frac{\pi}{2}+2n\pi$; $\frac{7\pi}{6}+2k\pi$. **1308.** $\frac{\pi}{12}+2n\pi$; $\frac{7\pi}{12}+2k\pi$. **1309.** $\frac{\pi}{6}+n\pi$; $\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{6}$. **1310.** $2\operatorname{arctg}\sqrt{7}+2n\pi$; $(2k+1)\pi$. **1311.** $\frac{\pi}{12}+2n\pi$; $-\frac{7\pi}{12}+2k\pi$. **1312.** $\frac{\pi}{4}+n\pi$; $(2k+1)\pi$. **1313.** $(2n+1)\pi$; $\operatorname{arctg}\frac{5}{2}+k\pi$. **1314.** $\frac{\pi}{2}+2n\pi$; $-2\operatorname{arctg}(4+\sqrt{15})+2k\pi$. **1315.** $\pm\frac{\pi}{4}+n\pi$. **1316.** $\frac{n\pi}{2}$; $\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$. **1317.** $\pm\frac{2\pi}{3}+2n\pi$. **1318.** 0,94. **1319.** 0,17. **1320.** а) 1; б) 1; в) 1, если $a=0$; бесконечное множество, если $a\neq 0$; г) 3. **1321.** В том и

только в том случае, когда сумма этих углов кратна π и тангенсы их существуют. 1322. $-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$; $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$. 1323. $-\frac{4(a-b)\sqrt{ab}}{(a+b)^2}$; $-\frac{a^2-6ab+b^2}{(a+b)^2}$. 1324. $-\frac{24}{25}$. 1328. $-\sin(\alpha+\beta)$ $(\beta \neq \alpha+n\pi)$. 1329. а) $2\sin\frac{\varphi}{2}$; б) $-2\cos\frac{\varphi}{2}$. 1330. $2\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 5\alpha$. 1338. $\frac{\pi}{2}+n\pi$. 1339. $\pm\frac{\pi}{8}+n\pi$; $\pm\frac{3\pi}{8}+k\pi$. 1340. $-\frac{\pi}{4}+n\pi$; $-\frac{\pi}{2}+2m\pi$; $2k\pi$. 1341. $\frac{\pi}{2}+2n\pi$; $2k\pi$. 1342. $n\pi$; $\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$. 1343. $\frac{n\pi}{5}$. 1344. $-\frac{\pi}{4}+n\pi$. 1345. $\frac{\pi}{2}+n\pi$; $-\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+k\pi$. 1346. Нет корней. 1347. $\frac{\pi}{2}+n\pi$; $\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$; $\frac{\pi}{10}+\frac{m\pi}{5}$. 1348. $n\pi$; $\frac{\pi}{4}+k\pi$. 1349. $\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2}$. 1351. $-\frac{\pi}{4}+n\pi$; $-\frac{\pi}{2}+2k\pi$; $\pi+2m\pi$. 1352. $x=\frac{\pi}{6}+2n\pi$, $y=\frac{\pi}{6}-2n\pi$. 1353. $x=\frac{\pi}{4}+2n\pi$, $y=\frac{\pi}{4}-2n\pi$. 1354. $x=\frac{\pi}{4}+(n+m)\pi$, $y=-\frac{\pi}{12}+(n-m)\pi$; $x=-\frac{\pi}{12}+(r+s)\pi$, $y=\frac{\pi}{4}+(r-s)\pi$; $x=-\frac{\pi}{12}+(k+l)\pi$, $y=\frac{\pi}{4}+(k-l)\pi$; $x=-\frac{\pi}{4}+(s+t)\pi$, $y=\frac{\pi}{12}+(s-t)\pi$. 1355. $x=\frac{\pi}{3}+(n+m)\pi$, $y=\frac{\pi}{3}+(n-m)\pi$; $x=-\frac{\pi}{3}+(k+l)\pi$, $y=-\frac{\pi}{3}+(k-l)\pi$. 1357. $\cos x=\frac{1}{2}$, $\cos y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ или $\cos x=-\frac{1}{2}$, $\cos y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; отсюда получается 8 групп решений.

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ VIII

1358. а) $5^{\frac{2}{3}}$; б) $\sqrt[10]{4^9}$; в) $\left(\frac{1}{3}\right)^{6,5}$; г) $\left(\frac{10}{11}\right)^{5\frac{1}{3}}$. 1361. $\frac{1}{9}$. 1362. $2^{-\frac{\sqrt{3}}{4}}$. 1368. а) $x \neq 0$; б) $|x| \geqslant 1$; в) множество всех действительных чисел. 1369. Больше 1: 2), 5), 6), 7); меньше 1: 1), 3), 4), 8), 9). 1371. а) $\left(\frac{1}{\pi}\right)^{-\sqrt{3}}$; б) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^2$; в) $\left(\frac{2}{3}\right)^{1+\sqrt{6}}$; г) $(\sqrt{3})^{\sqrt{3}-2}$. 1373. Если $a \neq 1$, то $x=y$; если $a=1$, то x и y — любые числа. 1377. $\log_2\sqrt{2}=\frac{1}{2}$; $\log_2\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}$; $\log_{2^2}\sqrt{2}=\frac{3}{2}$. 1380. $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$; $\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{3}=-\frac{1}{2}$; $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{9\sqrt{3}}=\frac{5}{2}$. 1381. а) -1; б) 0; в) $\frac{1}{2}$; г) 0. 1383. 3) 243; 4) 81; 5) 7; 6) 1; 7) $\frac{1}{2}$; 8) 49; 9) 100; 10) $\frac{1}{6}$; 11) $\frac{1}{25}$; 12) 20 736. 1390. а) $x>-1$; б) множество всех чисел; г) $x<0$; д) $x \neq 0$; е) $x<-2$; $x>1$; ж) $2<x<3$; з) множество всех чисел.

1391. а) $0 < x < \pi$; б) $0 < x < \frac{\pi}{2}$; $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$; в) $0 < x < \frac{\pi}{2}$; $\pi < x < \frac{3}{2}\pi$; г) $0 < x < \frac{\pi}{2}$; $\pi < x < \frac{3}{2}\pi$. **1392.** а) Ни наибольшего, ни наименьшего значения функция не имеет; б) наименьшее значение функции равно нулю (при $x = 1$), а наибольшего не существует. **1395.** а) $x > 3$; б) $|x| > 2$; в) $0 < x < 2$; г) $x > 2$; д) $x > 5$; е) $|x| < 1$. **1396.** а) $a > 1$; б) $a < 1$; в) $a > 1$; г) $a > 1$. **1397.** $a > 1$. **1398.** а) 2 и 3; б) 1 и 2; в) -2 и -1; г) -4 и -3. **1400.** 5) -3; 9) -3; 10) -2. **1403.** $-0{,}0762$, $0{,}0762$. **1404.** $x > 1$. **1405.** $x < 1$; $x > 2$. **1406.** На $\log_2 10\,000$. **1414.** а) 0,6309; б) 1,8927; в) 2,2618; г) 0,4421. **1417.** Нет. **1418.** а) $\lg 3 + 7\lg a$; б) $\lg 15 + 3\lg a + 3\lg b + 7\lg c$; в) $\frac{15}{7}\lg a + \frac{5}{7}\lg b$; г) $\frac{4}{3}\lg a + \frac{2}{3}\lg b$. **1419.** а) $\frac{1}{2}[\lg(a+b) - \lg(a-b)]$; г) $\frac{3}{5}(\lg a - \lg b - \lg 2)$. **1420.** а) $-\frac{3}{2}\lg\cos\varphi$; б) $\frac{1}{6}(\lg 2 + 2\lg\cos\varphi - 3\lg\sin\varphi)$. **1421.** а) $\frac{2}{3}(\lg b - \lg a - 3\lg 3)$; б) $\frac{1}{4}\lg 3 + \frac{1}{3}\lg 4 - \frac{3}{4}\lg a - \frac{2}{3}\lg b$; в) $\frac{1}{18}(3\lg 5 + 7\lg m + 4\lg n)$. **1422.** в) $\frac{5}{8}(\lg a - \lg b)$. **1423.** а) 6; б) 0,5; в) 4; г) 32. **1424.** а) 2; б) 16; в) $\sqrt[10]{\frac{81}{7}}$. **1425.** а) $\frac{a(a+b)^n}{\sqrt[n]{a-b}}$; б) $\frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt[24]{\frac{b^6(a-b)^4}{a^4(a+b)^3}}$; в) $\frac{\sqrt[15]{a^4b^5}}{a+b}$. **1426.** а) $\operatorname{tg}\varphi$; б) $2\cos\frac{\varphi}{2}\sqrt{\sin\frac{\varphi}{2}}$. **1427.** $\pi = 3 + 0{,}1415\ldots$; $-2{,}37 = -3 + 0{,}63$; $-7 = -7 + 0$; $-\pi = -4 + 0{,}8584\ldots$. **1431.** а) $\lg 6 \approx 0 + 0{,}7782$; б) $\lg 15 \approx 1 + 0{,}1761$; д) $\lg\frac{1}{12} \approx -2 + 0{,}9208$. **1433.** $\approx 1{,}4651$; $\approx 1{,}2894$; $\approx 1{,}8431$. **1434.** а) $\approx 2{,}304$; б) $\approx 10\,000$; в) $\approx 0{,}4048$; г) 0,002858; д) $\approx 0{,}0009426$; е) $\approx 0{,}01001$. **1438.** а) $\overline{1},2907$; б) $\overline{15},8640$; в) $\overline{66},2361$; г) 0,6496; д) 0,7112. **1440.** $\approx 186{,}5$. **1441.** $\approx 3{,}870$. **1442.** $\approx -0{,}04146$. **1443.** ≈ 88. **1444.** $\approx 0{,}3224$. **1445.** $\approx 1{,}617$. **1446.** $\approx 1{,}087$. **1447.** $\approx 1076\ см^2$. **1448.** $\approx 5738\ см^2$. **1449.** г) $-\frac{1}{2}$; з) $\frac{4}{3}$; к) 4. **1450.** а) -4; в) 3; г) 7; -1; д) если $a = 1$, то x — любое, если $a \neq 1$, то $x_1 = 2$, $x_2 = 3$; е) 7. **1451.** а) 3; б) 1; е) 2. **1452.** б) 1; г) $\frac{3}{2}$; е) 3; ж) $\frac{17}{13}$; к) 24. **1453.** а) 2; б) 1; в) 3; г) 4; д) 0; 1; е) 1; $\log_3\frac{5}{4}$; ж) 0; з) $\log_{\sqrt{3}}\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **1454.** а) 0; б) 0; в) 0; г) 0; д) 1; е) $\frac{\lg 7 - \lg 5}{\lg 3 - \lg 2}$; ж) если $a \neq b$, то $x = 0$; если $a = b$, то x — любое. **1455.** $x = -2$, $y = 0$. **1456.** $x = 3$, $y = 4$. **1457.** $x = 3$, $y = -2$; $x = -\log_2 9$, $y = \log_3 8$. **1458.** Система несовместна. **1459.** $x = 3$, $y = 4$. **1460.** а) 10; б) 64; в) 4; г) $\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$; д) 200; е) 25; ж) 80; **1461.** а) 2; б) $\frac{1}{2}$; в) 5; г) 5; д) $\sqrt{2}+1$, $\sqrt{2}-1$; е) 4; ж) $\frac{1}{78125}$. **1462.** а) $\frac{\sqrt{33}-1}{4}$; б) 13; в) 14; 6. **1463.** а) 10; 0,0001; б) 100; 1000; в) 9; $\sqrt{10}-1$; г) 0,001; 0,1; 10; 1000. **1464.** а) 1; -1; б) 0,2; 125; в) 10; г) 0,001, 10; д) $\sqrt[5]{10\,000}$; е) 0,1; 1000. **1465.** а) 3; б) $\frac{1}{3}$; 3; в) 5; г) $\sqrt{5}$;

25; д) 1; е) 16. **1466.** $x=10\sqrt{10}$, $y=\frac{1}{100\sqrt[4]{10}}$. **1467.** $x=2$, $y=32$; $x=32$, $y=2$. **1468.** $x=-2$, $y=\frac{1}{900}$. **1469.** $x=10$, $y=4$; $x=4$, $y=10$. **1471.** 0,6. **1472.** 1,40. **1473.** а) $x>-2$; б) $x>3$; в) $x>\log_3 2$; г) $x<1$; $x>5$; д) $x<-1$; $x>2$. **1474.** а) $2<x<5$; б) $7<x<7\frac{1}{16}$; в) $x>6$. **1476.** Примерно через 14 лет. **1477.** Примерно через 8 месяцев; вторая бригада. **1478.** а) $\frac{81}{2}$; б) 2000; в) $\frac{27\sqrt{2}}{2}$; г) 0,02. **1480.** а) $(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{n\pi}{2}$; б) $n\pi$. **1481.** $\log_2 7-3$. **1483.** а) 0,1; б) $\frac{1}{\sqrt[6]{10}}$; в) уравнение не имеет корней. **1484.** $a^{\frac{1}{a}}$. **1485.** а) $\approx 1{,}6541$; б) $\approx 0{,}6309$. **1486.** а) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}$; б) $\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{7}$; в) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\lg\frac{1}{7}}=\left(\frac{1}{7}\right)^{\lg\frac{1}{5}}$. **1487.** а) $0<x<\pi$; б) $x>0$. **1489.** 31; 140. **1491.** Нет корней. **1492.** $\frac{\lg 13}{\lg 5-\lg 3}$. **1493.** 0; 1. **1494.** $\frac{\lg\lg 7-\lg\lg 5}{\lg 7-\lg 5}$. **1495.** 4. **1496.** $\frac{\lg 2}{\lg\sqrt{4+\sqrt{15}}}$. **1497.** 9. **1498.** 100. **1499.** 2. **1502.** а) b; б) b. **1503.** $\frac{\log_a x\cdot\log_b x}{\log_a x+\log_b x}$. **1505.** $\frac{1}{\sqrt[4]{10}}$; $\sqrt[3]{10}$. **1506.** $\frac{1}{\sqrt[6]{10}}$; $\sqrt[3]{10}$. **1507.** $\frac{1}{5}$; $\frac{3}{5}\sqrt[4]{27}$. **1508.** $x=n\pi$, $y=2k\pi$; $x=\frac{\pi}{2}+2n\pi$, $y=\frac{\pi}{2}+k\pi$. **1509.** Система несовместна. **1510.** $x=y=1$. **1511.** а) Возрастает при $x>-2$, убывает при $x<-2$; б) возрастает при $1<x<4$, убывает при $-2<x<1$. **1512.** $-3<x<-2$; $x>3$. **1513.** $0{,}01\leqslant x\leqslant 10\,000$. **1514.** $x\leqslant -4$.

ФУНКЦИИ И ПРЕДЕЛЫ IX

1518. в) При $a=0$ и $a=1$ $f\left(\frac{1}{a}\right)$ не определено; при $a\neq 0$ и $a\neq 1$ $f\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{a+1}{a-1}$. **1519.** а) Если $-\frac{\pi}{2}+2n\pi\leqslant a\leqslant\frac{\pi}{2}+2n\pi$ (n — любое целое число), то $f(2a)=2f(a)\sqrt{1-f^2(a)}$; если $\frac{\pi}{2}+2n\pi\leqslant a\leqslant\frac{3}{2}\pi+2n\pi$, то $f(2a)=-2f(a)\sqrt{1-f^2(a)}$. **1520.** г) 1, если $a=0$, и $\sin(a^2)$, если $a\neq 0$. **1521.** а) $1+\frac{\pi^2}{4}$; б) 0; в) $\sin 2$, если $a=0$, и $1+(2-a^2)^2$, если $a\neq 0$. **1534.** Совокупность всех действительных чисел. **1538.** $x=\frac{\pi}{2}+2n\pi$. **1539.** $1<x<4$. **1542.** $x<-2$; $x>6$. **1543.** $-\frac{1}{5}<x<1$. **1547.** $x<2$; $x>4$. **1548.** $0<x<1$. **1550.** $0<x<\frac{5}{2}$; $x>3$. **1552.** $x\neq 0$; $x\neq\frac{2}{(2n+1)\pi}$.

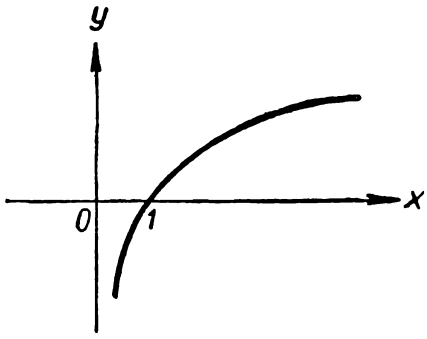

Рис. 1*.

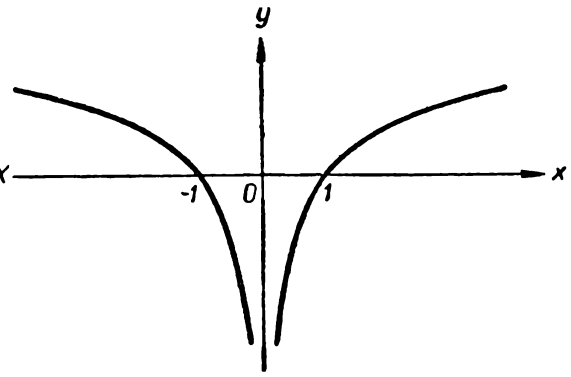

Рис. 2*.

1553. $x \neq n$. 1557. $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$; $x \neq -\frac{\pi}{3} + k\pi$. 1563. $x = 0$. 1565. $-\frac{\pi}{2} + 2n\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2n\pi$. 1568. в) $y > -2$; д) $y < 0$; е) $\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant 1$. 1569. б) См. рис. 1* и 2*. 1570. При $x < -\frac{3}{2}$ убывает, при $x > -\frac{3}{2}$ возрастает. 1572. Убывает при $x \leqslant -5$ и при $-\frac{3}{2} \leqslant x \leqslant 2$, возрастает при $-5 \leqslant x \leqslant -\frac{3}{2}$ и при $x \geqslant 2$. 1576. Возрастает при $-\frac{5}{6}\pi + n\pi < x < \frac{1}{6}\pi + n\pi$. 1579. Возрастает в каждом интервале, не содержащем точки $x = 2$. 1581. Убывает при $4n\pi \leqslant x \leqslant 2\pi + 4n\pi$; возрастает при $2\pi + 4k\pi \leqslant x \leqslant 4\pi + 4k\pi$. 1584. Убывает в каждом интервале, не содержащем точки $x = 0$. 1585. Указание. $\frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$. 1586. а) Всюду убывает; б) всюду убывает. 1588. Вообще говоря, нет. 1590. $x_{\min} = 1$, $y_{\min} = 5$. 1593. $x_{\min} = 2$, $y_{\min} = -1$. 1597. $x_{\max} = -a$, $y_{\max} = a^2$. 1598. $x_{\min} = -\frac{\pi}{4} + 2n\pi$, $y_{\min} = -1$; $x_{\max} = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$, $y_{\max} = 1$. 1600. $x_{\min} = -\frac{3}{4}\pi + 2n\pi$, $y_{\min} = -\sqrt{2}$; $x_{\max} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $y_{\max} = \sqrt{2}$. 1601. -15; $\frac{1}{8}$. 1602. 0; 42. 1603. $-\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. 1606. Четные функции 3) и 5), нечетные 1) и 2). Остальные функции не относятся ни к четным, ни к нечетным. 1609. Единственной такой функцией является функция $y = 0$. 1610. а) Функция $f(x)$ удовлетворяет условию $f(-x) = \pm f(x)$, причем одним значениям x может соответствовать знак «+», а другим «—». В этом случае относительно четности функции $f(x)$ нельзя сделать, вообще говоря, никаких выводов; б) $f(x) = 0$. 1611. а) Нет; б) да; например, $y = x^3$. 1613. π. 1614. 4π. 1615. $\frac{\pi}{3}$. 1616. π. 1617. π. 1618. 3π. 1619. $\frac{2\pi}{3}$. 1620. π. 1621. $\frac{\pi}{2}$. 1625. $y = \sqrt[3]{x}$. 1626. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. 1627. $y = \frac{1-x}{1+x}$. Данная и обратная к ней

функции совпадают. Области определения этих функций задаются неравенством $x \neq -1$, а области изменения — неравенством $y \neq -1$. **1628.** $-\sqrt{x}$. **1632.** а) Нет; б) да; в) нет. **1633.** а) Да; б) да; в) да. **1634.** а) Да; б) нет; в) да; г) нет. **1660.** 0. **1661.** -10. **1662.** 1. **1663.** $\frac{1}{2}$. **1664.** $\frac{7}{8}$. **1665.** 0. **1666.** -2. **1667.** $\frac{1}{2\sqrt{a}}$. **1668.** -2. **1669.** $\frac{1}{4}$. **1670.** $\frac{2}{3}$. **1671.** 4. **1672.** 4. **1673.** $\frac{1}{4}$. **1674.** 3. **1675.** $\frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}$. **1677.** 1. Указание. Ввести новую переменную $y = \frac{x}{2}$. **1678.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Указание. $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times$ $\times (\sin x + \cos x)$. **1685.** 2. **1687.** 9. **1688.** 1. Указание. Ввести новую переменную $y = x - \frac{\pi}{3}$. **1690.** 1. **1692.** -10. **1694.** $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$. **1695.** $-\frac{9}{10}$. **1696.** 48. **1698.** $-\frac{1}{4\sqrt{2}}$. **1700.** 1. **1701.** 0,02. **1702.** $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\alpha}$, если $\alpha \neq 0$, 1, если $\alpha = 0$. **1703.** $2 < x \leqslant 7$. **1704.** $-3 < x < 0$; $2 < x < 5$. **1705.** $x \neq \frac{n\pi}{2}$. **1706.** Совокупность всех нецелых положительных чисел. **1708.** $1 - 5\sqrt{5} < y < 1 + 5\sqrt{5}$. **1709.** $0{,}1 \leqslant y \leqslant 10$. **1710.** Вообще говоря, нет. **1715.** $2^x = (2^{x-1} + 2^{-x-1}) + (2^{x-1} - 2^{-x-1})$. **1722.** 3. **1723.** $\frac{1}{4\sqrt{2}}$. **1724.** $\frac{1}{\sqrt{a}}$. **1725.** $\frac{2}{3}$. **1726.** 0. **1727.** 4. **1718.** $-\frac{1}{2}$. **1729.** 0. **1730.** $\frac{a}{b}$. **1731.** $\frac{a}{b}$. **1732.** 1. **1734.** 1. **1735.** 0. **1736.** $\cos\alpha \sqrt{\frac{\alpha}{\sin\alpha}}$. **1737.** 0.

ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ X

1741. а) v_0; б) $v_0 + at_0$. **1742.** а) 0 *м/мин*; б) $\frac{1}{12}$ *м/мин*; в) 75 *м/мин*. **1743.** $\frac{1}{2\sqrt{t}}$. **1744.** а) 1; б) $4x$; в) $2(x+1)$; г) $\frac{1}{\sqrt{x}}$; д) $-2x$; е) $3x^2$. **1745.** а) 4,8 *град/сек*; б) 4 *град/сек*. **1746.** 5 *ампер/сек*. **1747.** Обе функции дифференцируемы в точке $x = 0$. **1748.** Эта же прямая. **1749.** а) Имеет, $y = -x$; б) нет; в) имеет, $y = x$. **1751.** Угол между касательными к кривым в точке их пересечения (см. рис. 3*). **1752.** а) $2x + y + 1 = 0$; б) $y = 0$; в) $2x - y - 1 = 0$. **1753.** $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 6$. **1754.** В точке (0,0) под углом $\frac{\pi}{4}$ и в точке (1,1) под углом $\operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi}{4}$. **1757.** $2x + 1$. **1758.** $2x - 2$. **1759.** $8x - 4$. **1760.** $-4x + 15$. **1761.** $18 - 20x$. **1762.** -4. **1763.** $-20x^3 - 4x$. **1764.** $5x^2(3 - 4x)$. **1765.** $4x^3 + 2x$. **1766.** $-140x^3 +$

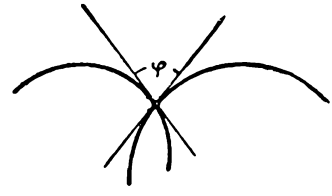

Рис 3*.

$+45x^2-24x+3$. 1767. $4x^3$. 1768. $2x(1-2x^2)$. 1769. $8(2x-3)^3$. 1770. $2(x^2+ax)\times$ $\times(2x+a)$. 1771. $3x^2(2x^3-b+a)$. 1774. $-\frac{2}{(1+x)^2}$. 1775. $-\frac{2}{(5-4x)^2}$. 1776. $-\frac{1+x^2}{(x^2-1)^2}$. 1777. $\frac{4x-14x^2}{(1-7x)^2}$. 1778. $-\frac{15}{2(3x-2)^2}$. 1779. $\frac{5}{(6-x)^2}$. 1780. $-\frac{70}{(3-10x)^2}$. 1781. $\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$. 1783. $\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$. 1784. $\frac{\sqrt[6]{45}}{2\sqrt{x}}$. 1785. $-\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$. 1786. $-\frac{3}{2\sqrt{2}\,x^2\sqrt{x}}$. 1787. $5+\frac{1}{x^2}$. 1788. $\frac{-21+3x+5x^4}{2x^2\sqrt{x}}$. 1790. $10x^4-1$. 1791. $21x^6-36x^5-12x^2+10x$. 1792. $-3x^2-6x+6$. 1793. $-6+68x^3$. 1794. $5x^4-21x^2-2x+10$. 1795. $2x(x^6+1)(7x^6+1)$. 1796. $24x^2(1-3x^4)^2(1-15x^4)$. 1797. а) $y=x$; б) $y=1$; в) $y=-1$; г) $4x-$ $-4\sqrt{2}\,y+(4-\pi)=0$; д) $x+y-\pi=0$. 1803. $\sin 2x$. 1804. $-\sin 2x$. 1805. $\cos 2x$. 1806. $2x\sin x+x^2\cos x$. 1809. $(5+\cos x)(x^2-\cos x)+(5x+\sin x)(2x+\sin x)$. 1812. $-2\sin 2x$. 1815. 0. 1816. $\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sin x+2x\cos x)$. 1818. $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. 1820. $10(2x+3)^4$. 1821. $6(x+7)^5$. 1822. $-35(1-5x)^6$. 1823. $4\cos 4x$. 1824. $\frac{1}{5}\cos\frac{x}{5}$. 1828. $A\omega\cos(\omega x+\varphi)$. 1829. $A\omega\sin(\varphi-\omega x)$. 1833. $\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$. 1834. $-\frac{1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}$. 1836. а) 18 *м/мин*^{2}; б) 730 *м/мин*^{2}. 1837. $-\frac{1}{4t\sqrt{t}}$. 1838. $y'=3(x+2)^2$; $y''=6(x+2)$; $y'''=6$; $y^{IV}=y^V=\ldots=0$. 1839. $y'=$ $=6(2x-1)^2$; $y''=24(2x-1)$; $y'''=48$; $y^{IV}=y^V=\ldots=0$. 1842. $y'=-\sin x$; $y''=-\cos x$; $y'''=\sin x$; $y^{IV}=\cos x$, и далее все повторяется. 1845. 150 раз. 1846. $\frac{1}{4}\sin x+\frac{3^{100}}{4}\sin 3x$. 1847. 15 360. 1848. 780. 1849. $-2300\cdot 2^{22}$. 1851. $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{120}$. 1852. 4. 1853. а) 10; г) 7; е) 6. 1855. а) $89-28\sqrt{10}$; б) $112+64\sqrt{3}$; в) $176\sqrt{6}-304\sqrt{2}$. 1856. 4. 1859. Указание. $11^{10}-1=(10+1)^{10}-1$; $(10+1)^{10}$ разложить по формуле бинома Ньютона. Для полного решения задачи нужно доказать, что биномиальные коэффициенты — числа целые. 1860. а) 45; г) 630. 1862. а) 3; б) 4; в) 5. 1863. 66. 1864. $-\frac{5120}{9}$. 1865. 1,12. 1868. 0,97. 1871. 1,025. 1875. 0,99. 1877. 1,01. 1878. 0,98. 1881. При $x<2$ возрастает при $x>2$ убывает. 1882. При $|x|<1$ убывает, при $|x|>1$ возрастает. 1883. При $-1<x<0$ и $x>1$ возрастает, а при $x<-1$ и $0<x<1$ убывает. 1884. При $x<-5$ и $x>1$ возрастает, а при $-5<x<1$ убывает. 1885. Всюду убывает. 1889. При $-\frac{\pi}{3}+2n\pi<x<\frac{\pi}{3}+2n\pi$ возрастает, при $\frac{\pi}{3}+2k\pi<x<\frac{5}{3}\pi+2k\pi$ убывает. 1890. При $\frac{\pi}{4}+2n\pi<x<\frac{3}{4}\pi+2n\pi$ убывает, при $\frac{3}{4}\pi+2k\pi<x<\frac{9}{4}\pi+2k\pi$ возрастает. 1891. Возрастает. 1892. Убывает. 1893. Возрастает. 1894. Убывает. 1895. При $-1<x<0$ и $0<x<1$ убывает, при $|x|>1$ возрастает. 1896. При $x<0$ убывает, а при

$x > 0$ возрастает. **1897.** Всюду убывает. **1898.** $-\frac{37}{4}$ (минимум). **1900.** $-\frac{a^2}{8}$ (минимум). **1902.** Минимум 110, максимум 174. **1903.** Минимум -177, максимум 39. **1904.** Минимум -1. **1905.** Минимум $-\sqrt{2}$, максимум $\sqrt{2}$. **1906.** Минимум -2, максимум 2. **1908.** Нет локальных экстремумов. **1910.** $2n\pi + 1$ и $\frac{\pi}{2} + 2k\pi - 1$. **1916.** а) $-1{,}375$; $1{,}375$; б) -2; 2. **1917.** а) -2; $\sqrt{3}$; б) $-\sqrt{3}$; 1. **1919.** а) $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$, 0; б) $\frac{\pi}{8} - \frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$. **1926.** См. рис. 4*. **1928.** См. рис. 5*. **1937.** $t = 31$ *сек*. **1939.** 25 *м/сек* и 37 *м/сек*. **1940.** $2x - y + 5 = 0$. **1941.** $6x - y - 3 = 0$. **1942.** $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$. **1943.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\pi - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$. **1944.** а) (1,4); б) $(-2, -11)$. **1945.** $\frac{55}{9}x^4$. **1947.** 51. **1956.** Ширина должна быть равна $\frac{d}{\sqrt{3}}$. **1957.** $-\frac{2}{(2x+5)^2}$. **1958.** $-\frac{1}{2\sqrt{3-x}}$. **1959.** $3(x-3)^2 - \frac{3}{(x-3)^4}$. **1960.** $2\sin 4x - \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$. **1961.** $(1 + 2x - x^2)\cos x - (x+1)^2 \sin x$. **1963.** $-\sin 4x$.

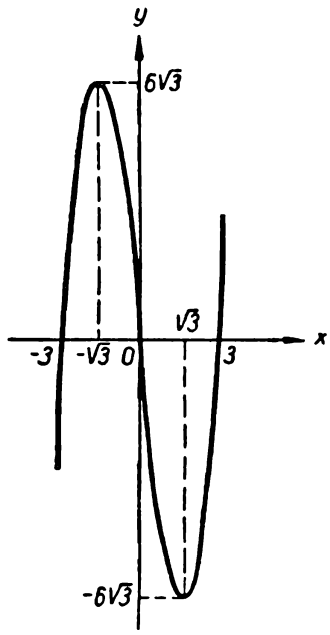

Рис. 4*.

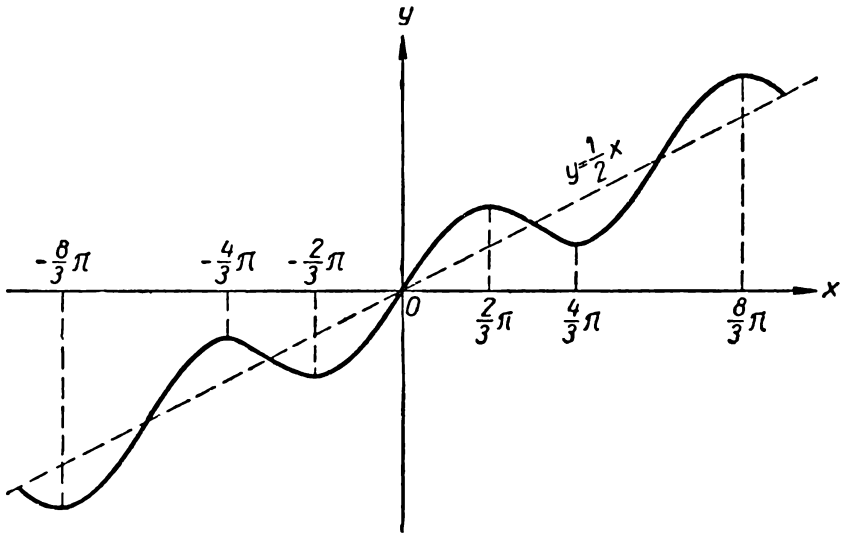

Рис. 5*.

1967. а) Да; б) нет; в) да. 1968. а) Нет; б) нет. 1972. а) $a=c$, $b=d$; б) либо $a\neq c$, либо $b\neq d$; возможно, конечно, что и $a\neq c$ и $b\neq d$. 1973. а) $x=0$, $y=-3$; б) $x=1$, $y=-1$. 1975. а) $x=\frac{11}{17}$, $y=-\frac{2}{17}$; в) $x=t$, $y=\frac{2}{3}(4-t)$, где t — любое действительное число. 1977. а) $x=-3$, $y=-6$; б) $x=-\frac{92}{77}$, $y=-\frac{194}{77}$; в) $x=-2$; $y=-\frac{9}{2}$. 1978. $-13+13i$. 1982. $33+56i$. 1988. $1-i$. 1989. а) Определение; б) теорема. 1990. $2+2i$. 1991. $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$. 1993. Указание. Для доказательства пропорции $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ достаточно показать, что числа b и d отличны от нуля и $ad=bc$. 1995. а) Нет; б) нет; в) да. 2001. $a=b=0$; б) хотя бы одно из чисел a и b отлично от нуля. 2002. а) $x=3$, $y=-1$; б) $x=2$; $y=-2$; в) $x=y=1$; г) $x=t$, $y=-2t$, где t — любое действительное число; д) равенство не выполняется ни при каких действительных значениях x и y. 2004. а) Действительные числа; б) чисто мнимые числа. 2008. $\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i)$. 2011. $-i$. 2014. $-1-i$. 2015. 0. 2016. 0. 2017. 0, если $n=4k$; i, если $n=4k+1$; $i-1$, если $n=4k+2$; -1, если $n=4k+3$. 2018. -1. 2019. i. 2023. а) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$; б) $\pm\frac{\sqrt{3}-i}{2}$. 2024. а) $1\pm i$. 2029. а) $a(x^2-10x+26)=0$. 2030. $a(x^2+20x+200)=0$. 2031. $a(2x^2-14x++205)=0$. 2032. 3; $-\frac{3}{2}(1\pm\sqrt{3}i)$. 2033. -3; $\frac{3}{2}(1\pm\sqrt{3}i)$. 2035. $-\sqrt[3]{5}$; $\frac{\sqrt[3]{5}}{2}(1\pm\sqrt{3}i)$. 2039. $x_1x_2x_3=6$. 2042. $\pm\sqrt[4]{2}$; $\pm\sqrt[4]{2}i$. 2043. $-\frac{\sqrt[4]{12}(1\pm i)}{2}$; $\frac{\sqrt[4]{12}(1\pm i)}{2}$. 2045. 0. 2046. 7. 2047. 1) $4\left(\cos\frac{\pi}{3}++i\sin\frac{\pi}{3}\right)$; 2) $2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$; 3) $6\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$; 4) $13[\cos(\pi-\varphi)+i\sin(\pi-\varphi)]$, где $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{12}{5}$; 5) $25(\cos 0+i\sin 0)$; 6) $4(\cos\pi+i\sin\pi)$; 7) $3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; 8) $2\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi\right)$; 9) $5[\cos(\pi-\varphi)+i\sin(\pi-\varphi)]$, где $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$. 2048. 2) На окружности радиуса 2 с центром в начале координат; 3) в круге радиуса 3 с центром в начале координат; 5) в кольце между концентрическими окружностями радиусов 2 и 3 с центром в начале координат, исключая эти окружности; 6) на луче, исходящем из начала координат и образующем с осью x угол $\frac{\pi}{3}$. 2049. Только при $r=0$. 2050. Могут, при $\varphi=n\pi$. 2051. $2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}++i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$, если $-\pi+4k\pi\leqslant\alpha\leqslant\pi+4k\pi$; $-2\cos\frac{\alpha}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\pi\right)+\right.$

$+ i \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \pi\right)\Big]$, если $\pi + 4k\pi < \alpha < 3\pi + 4k\pi$. **2054.** $2(\cos 340° + i \sin 340°)$. **2055.** $3(\cos 195° + i \sin 195°)$. **2056.** а) $15i$; б) $-7 + 7\sqrt{3}\,i$; в) -24; г) 42. **2057.** а) $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\,i$; б) $2^{19}(1 + \sqrt{3}\,i)$; в) 1. **2059.** а) i; б) $\cos 190° + i \sin 190°$. **2062.** а) $\sqrt[5]{a}\left(\cos\frac{2k\pi}{5} + i \sin\frac{2k\pi}{5}\right)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$; б) $\cos\left(\frac{1}{10}\pi + \frac{2}{5}k\pi\right) + i \sin\left(\frac{1}{10}\pi + \frac{2}{5}k\pi\right)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$. **2066.** При $|a| = |b| \neq 0$. **2069.** -4. **2070.** -8. **2071.** 0. **2073.** $-2i$. **2076.** а) $a(x^2 + 32x + 260) = 0$; б) $a(5x^2 + 14x + 13) = 0$. **2077.** Нет. **2078.** а) $x = 2t$, $y = t$, где t — любое действительное число, отличное от нуля; б) x и y — любые действительные числа, не равные нулю одновременно. **2083.** б) $\cos(-2\alpha) + i \sin(-2\alpha)$. **2088.** 1024.

МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ XII

2099. $2n$ частей. **2101.** При $n = 1$ утверждение верно. Пусть оно верно при $n = k$. Тогда $(1 + a)^{k+1} = (1 + a)^k \cdot (1 + a) > (1 + ka)(1 + a) = 1 + ka + a + ka^2 = 1 + (k + 1)a + ka^2 > 1 + (k + 1)a$.

ЗАДАЧИ НА ПОВТОРЕНИЕ ВСЕГО КУРСА АЛГЕБРЫ И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

2109. Если $a > 2b$, то через $\frac{a - 2b}{c}$ дней. Если $a \leqslant b$, то на первом складе никогда не будет угля вдвое больше, чем на втором. **2110.** 15 *ч* и 10 *ч*. **2111.** 50 *км/ч*. **2112.** 12, 10 и 15 *ч*. **2113.** 10 *км* и 5 *км*. **2114.** 1000 *км/ч* и 800 *км/ч*. **2115.** 9; 28. **2116.** 5 *км/ч* и 3,5 *км/ч*. **2117.** 10 человек. **2118.** 35 суток. **2119.** 500 *м*. **2120.** а) Если $a \neq \pm 1$, то $x = \frac{1}{a - 1}$; если $a = -1$, то x — любое число: если $a = 1$, то корней нет; в) нет корней. **2121.** а) Если $a < 0$, то корней нет; если $a \geqslant 0$, то $x = \frac{3 \pm a}{2}$; б) -1, 2. **2123.** а) $x = \frac{2a}{a^2 - a + 1}$, $y = \frac{a^2 - a - 1}{a^2 - a + 1}$; б) если $a \neq \pm 2$, то $x = \frac{1}{2 - a}$, $y = \frac{1 - a}{a - 2}$; если $a = 2$, то решений нет; если $a = -2$, то $x = t$, $y = -\frac{1 + 2t}{2}$, где t — любое число; в) при $a = 0$ и $a = 1$ нет решений; при $a \neq 0$ и $a \neq 1$ $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{1 - a}$. **2124.** а) $x = 5$, $y = 4$ и $x = -4$, $y = -5$; б) $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{4}{3}$ и $x = \frac{4}{3}$, $y = \frac{2}{3}$; в) если $b \neq 0$, то $x = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + b\right)$, $y = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} - b\right)$; если $b = 0$, а $a \neq 0$, то решений нет; если $a = b = 0$, то $x = y = t$, где t — любое число. **2129.** $\frac{9}{4} < x < \frac{7}{2}$ **2130.** $-1 < a < 2$. **2131.** а) 10; б) 1; в) 5. **2132.** а) $a \leqslant 1$; $a > 2$; б) $0 < a \leqslant 1$; $2 \leqslant a < 3$; в) $a < 0$; $a > 3$. **2133.** а) $x < 2$; б) x — любое действительное число; в) $2 \leqslant x < 4$. **2135.** $3^{600} > 6^{300}$.

Указание. $3^{600} = (3^2)^{300} = 9^{300}$. 2133. Если $k > 100\left(\sqrt[n]{2} - 1\right)$, то ежегодный прирост населения составляет $\dfrac{k - 100\left(\sqrt[n]{2} - 1\right)}{\sqrt[n]{2} - 1}$ процента. При $k < 100\left(\sqrt[n]{2} - 1\right)$ условия задачи противоречивы. 2137. Если угол φ оканчивается в 1-й четверти, то $\cos\varphi = \frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{5}{12}$; если угол φ оканчивается во 2-й четверти, то $\cos\varphi = -\frac{12}{13}$; $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{5}{12}$. 2138. Если угол φ оканчивается во 2-й четверти, то $\sin\varphi = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{4}{3}$; если угол φ оканчивается в 3-й четверти, то $\sin\varphi = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{4}{3}$. 2140. $\frac{1}{3}$; $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\frac{1}{2\sqrt{2}}$; $2\sqrt{2}$. 2141. $\frac{5}{13}$; $-\frac{12}{13}$; $-\frac{5}{12}$; $-\frac{12}{5}$. 2142. $-\frac{2}{\sqrt{13}}$, $\frac{3}{\sqrt{13}}$; $-\frac{2}{3}$; $-\frac{3}{2}$. 2148. $\frac{3}{2}\left(\alpha \neq \frac{n\pi}{2}\right)$. 2149. $2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$. 2150. а) 1; б) 0. 2151. $a < \frac{1}{4}$; б) $-2 < a < \frac{1}{4}$. 2154. а) $\sqrt{0{,}9}$; б) $-\frac{3}{5}$; в) $-\frac{1}{3}$. 2155. $\frac{\pi}{2} + 2n\pi$. 2157. Нет корней. 2158. $\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$. 2159. $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + n\pi$. 2160. $\pm\frac{\pi}{3} + n\pi$. 2161. Нет корней. 2162. $-\frac{\pi}{3} + n\pi$. 2163. $\frac{\pi}{4} + n\pi$; $\operatorname{arctg} 2 + k\pi$. 2164. Нет корней. 2165. $\frac{\pi}{2} + n\pi$; $\frac{\pi}{6} + k\pi$. 2167. $\frac{\pi}{2} + n\pi$. 2168. $n\pi$; $-\operatorname{arctg} 3 + k\pi$. 2169. $\frac{(-1)^n}{2}\arcsin\frac{1}{3} + \frac{n\pi}{2}$. 2170. $\frac{\pi}{4} + n\pi$; $\operatorname{arctg} 2 + k\pi$. 2171. $\frac{n\pi}{4}$. 2172. $\frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{3}$. 2173. $\frac{\pi}{6} + 2n\pi$; $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$. 2174. $(2n+1)\pi$; $\operatorname{arctg} 4 + k\pi$. 2175. $\pm\arccos\frac{\sqrt{17}-3}{4} + 2n\pi$. 2176. $\frac{\pi}{12} + n\pi$; $\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{6}$. 2177. $2n\pi$; $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$. 2178. $n\pi$; $-\frac{\pi}{6} + k\pi$. 2179. $\frac{\pi}{4} + n\pi$. 2180. $x = \frac{\pi}{3} + 2n\pi$, $y = \frac{\pi}{3} - 2n\pi$; $x = 2\operatorname{arctg}(\sqrt{3}+2) + 2n\pi$, $y = \frac{2\pi}{3} - 2\operatorname{arctg}(\sqrt{3}+2) - 2n\pi$. 2181. $x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + n\pi$, $y = \pm\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$; $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + n\pi$, $y = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$. 2182. $x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + n\pi$; $y = \pm\frac{5}{6}\pi + 2k\pi$; $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + n\pi$, $y = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$. 2183. $x = \frac{\pi}{3} + (n+k)\pi$, $y = \frac{\pi}{3} + (n-k)\pi$; $x = -\frac{\pi}{3} + (n+k)\pi$, $y = -\frac{\pi}{3} + (n-k)\pi$. 2185. 9 и 21. 2186. 2, 4, 8, 12 или $\frac{25}{2}$, $\frac{15}{2}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{3}{2}$. 2187. 2, 10, 18 и 2,

6, 18. 2188. $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$. 2189. $\frac{\pi a^2}{9}\ \frac{2\pi a}{\sqrt{3}}$. 2190. 2, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{9}$, ... 2194. 1. 2195. $\frac{3}{2}$. 2196. 0. 2197. $\frac{2}{\lg 3-\lg 2}$. 2198. 2; -2. 2199. Если $a>1$, то $x=\frac{a}{a-1}$; при $a<1$ корней нет. 2200. 100; $\pm\frac{1}{\sqrt{10}}$. 2202. 1; $\frac{1}{2}$; $\sqrt[16]{8}$. 2203. $\frac{9}{4}$; $\frac{1}{12}$. 2204. 10; $\sqrt[9]{10}$. 2205. 1. 2206. 4. 2207. 1; 3; $\frac{1}{3}$. 2208. $\frac{\pi}{4}+2n\pi$. 2212. $x<-5$. 2213. а) $x=4$, $y=8$; $x=-4$, $y=-8$; б) $x=8$, $y=4$; $x=4$, $y=8$; г) $x=7$, $y=3$; $x=-7$, $y=-3$; д) $x=2$, $y=32$; $x=32$, $y=2$. 2214. Не более 5 пластинок. 2216. в) $2\leqslant x<5$; г) $x\neq 0$ и $x\neq\frac{1}{3}$; д) совокупность всех неотрицательных чисел, кроме $x=\frac{\pi}{2}+n\pi$ и $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$. 2223. а) 9; б) 6; в) $\frac{2}{3}$; г) $2\cos\alpha$. 2226. а) $8+53i$; г) -8. 2228. а) $x=1$, $y=2$; $x=-1$, $y=-2$; б) $x=0$, $y=7$; $x=\frac{9}{2}$, $y=18$. 2230. $\left(2\cos\frac{\alpha}{2}\right)^n\left(\cos\frac{n\alpha}{2}+i\sin\frac{n\alpha}{2}\right)$. 2233. $\cos 5\varphi=\cos^5\varphi-10\cos^3\varphi\sin^2\varphi+5\cos\varphi\sin^4\varphi$; $\sin 5\varphi=\sin^5\varphi-10\sin^3\varphi\cos^2\varphi+5\sin\varphi\cos^4\varphi$. 2235. $x-4y+4=0$. 2236. $2x-y-1=0$; $2x+y-3=0$. 2237. а) $4\sin^3 x\cos x$; б) $6\sin^2 2x\cos 2x$; в) $-5\cos^4(x-1)\sin(x-1)$; г) $4\cos^3(2-x)\sin(2-x)$; д) $10x(x^2+1)^4$; е) $-6(3-2x)^2$. 2238. $A\omega\cos(\omega t+\varphi)$; $-A\omega^2\sin(\omega t+\varphi)$. 2239. Могут, например, x и $x+1$. 2243. а) $-1\,293\,600$; б) 1; в) -100.

Евгений Семенович Кочетков
Екатерина Семеновна Кочеткова

АЛГЕБРА
И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ
10 класс

Редактор *И. С. Михеев*
Переплет художника *А. С. Котлярова*
Художественный редактор *Е. Н. Карасик*
Технический редактор *В. Ф. Коскина*
Корректор *М. В. Голубева*

●

Подписано к печати с матриц 3/VII 1973 г. 60×90¹/₁₆. Типографская № 3. Печ. л. 18. Уч.-изд. л. 14,89. Тираж 1 900 тыс. (1—1 600 000) экз. Заказ 1159.

●

Издательство «Просвещение» Государственного комитета Совета Министров РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Государственного комитета Совета Министров РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Саратов, ул. Чернышевского, 59.

Цена 27 коп.